This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

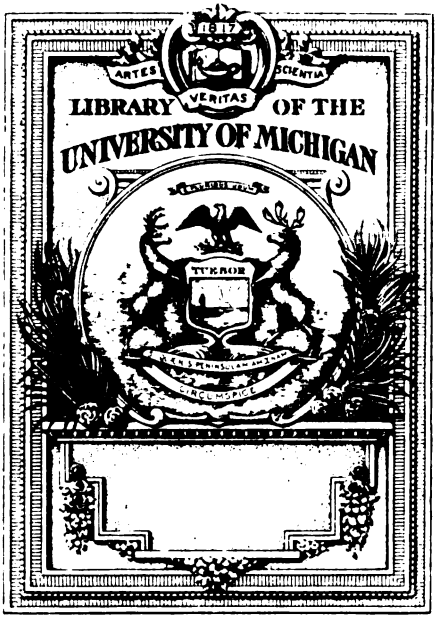
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`



THE GIFT OF
Professor
William H. Butts

QA
501
.L17
1852

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

Les deux parties de cet ouvrage se vendent séparément :

La première partie, **LIGNE DROITE ET PLAN**, 2e édition, revue par E. CATALAN, 1 vol. in-8°, avec un Atlas de 17 planches. 5 fr.

La deuxième partie, **PROBLÈMES SUR LES SURFACES**, par E. CATALAN, 1 vol. in-8°, avec un Atlas de 17 planches. 4 fr. 50

DU MÊME AUTEUR :

THÉORÈMES ET PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE, avec leur démonstration et leur solution raisonnée. 2e *édit.*, revue et considérablement augmentée, par E. CATALAN. 1 beau vol. in-8°, avec 15 pl. Paris, 1852. 8 fr.

Les 450 Théorèmes et Problèmes contenus dans ce volume offrent aux élèves cet avantage qu'ils sont gradués et progressifs, et qu'ils se succèdent suivant l'ordre adopté par Legendre.

TYPOGRAPHIE HENNUYER, RUE DU BOULEVARD, 7. BATIGNOLLES.
Boulevard extérieur de Paris.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

RENFERMANT TOUTES LES MATIÈRES EXIGÉES POUR L'ADMISSION
A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR

H. CH. DE LAFRÉMOIRE
Ancien élève de l'École Polytechnique,

ET

E. CATALAN
Docteur ès sciences, agrégé de l'Université, membre de la Société
Philomatique, etc.

DEUXIÈME ÉDITION.

TEXTE.

RADCLIFFE
OBSERVATORY
OXFORD

PARIS
CARILIAN-GŒURY ET Vve DALMONT
LIBRAIRES DES CORPS DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,
QUAI DES AUGUSTINS, 49.

1852

William H. Butler
10-4-1935

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

CHAPITRE PREMIER.

But de la Géométrie descriptive. — Propriétés relatives aux projections des points et des lignes, et aux traces des plans.

1. La *Géométrie descriptive* a pour objet spécial de résoudre, par des constructions effectuées sur un plan, tous les problèmes qui se rapportent aux trois dimensions de l'étendue.

Les difficultés insurmontables qu'on rencontre à chaque instant lorsqu'on veut, par les procédés de la Géométrie élémentaire, représenter dans l'espace les données d'un problème, et exécuter les constructions nécessaires à sa solution, suffisent pour faire comprendre toute l'importance de cette branche des mathématiques.

Supposons, par exemple, qu'on veuille déterminer la distance d'un point donné à un plan donné. On sait que cette distance se mesure par la perpendiculaire abaissée

du point sur le plan : mais comment fixer la direction de cette perpendiculaire? comment déterminer le point où elle rencontre le plan? Les procédés graphiques ordinaires devenant tout à fait impuissants, on est obligé d'avoir recours à des méthodes particulières, dont l'ensemble constitue la Géométrie descriptive.

2. De toutes les méthodes employées pour réduire les constructions qui devraient être effectuées dans l'espace, à des constructions faites sur un plan unique, la plus simple est la *Méthode des projections*.

Nous allons faire connaître en quoi elle consiste.

3. On appelle *projection d'un point* sur un plan, le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan.

Fig. 1. Ainsi, concevez que du point A, on abaisse sur le plan MN, la perpendiculaire AP; le pied P de cette perpendiculaire sera la projection du point A sur le plan MN, qu'on nomme *plan de projection*. Il est clair que le point P est la projection commune de tous les points de la droite indéfinie AP.

4. La *projection d'une ligne* est le lieu géométrique des projections de tous les points de cette ligne.

Fig. 2. Ainsi, la ligne PQR, qui passe par les projections des différents points de la ligne ABC sur le plan MN, est la projection de ABC sur le plan MN. Les perpendiculaires AP, BQ, CR... étant parallèles entre elles, leur ensemble constitue une surface cylindrique, que l'on désigne ordinairement sous la dénomination de *cylindre projetant*.

On peut considérer la projection PQR comme l'intersection de ce cylindre par le plan MN; et il est évident que toute courbe A'B'C' tracée sur la surface de ce cylindre, a pour projection, sur le plan MN, la même ligne PQR.

5. Quand la courbe ABC est plane, et que son plan est perpendiculaire au plan de projection MN, le cylindre projetant n'est autre chose que le plan même de la courbe; car les perpendiculaires qui déterminent les projections des points de cette courbe sont toutes renfermées dans ce plan. Alors la projection de la courbe se réduit à une droite.

Il est clair que si la courbe est dans un plan parallèle au plan de projection, elle se projette suivant une courbe qui lui est égale.

6. Lorsque la ligne à projeter est une droite ABC, les perpendiculaires AP, BQ, CR, etc., abaissées de ses différents points sur le plan de projection MN, sont dans un même plan perpendiculaire au plan MN; les pieds P, Q, R, etc., de ces perpendiculaires sont donc en ligne droite; et par conséquent *la projection d'une droite est une ligne droite.* Fig. 3.

Or, deux points déterminent une droite. Conséquemment, pour projeter la droite ABC sur le plan MN, il suffit de mener, par deux points A et B de cette droite, des perpendiculaires AP et BQ au plan MN, et de joindre, par une droite PQ, les pieds de ces perpendiculaires : PQ est la projection demandée.

Remarquons encore que, pour obtenir la projection de la droite ABC, on peut mener par cette droite un plan perpendiculaire à MN; l'intersection de ce *plan projetant* avec le plan MN est la projection de ABC.

7. Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, la projection de cette droite est le point où elle rencontre le plan : car les perpendiculaires abaissées des différents

points de la droite sur le plan se confondent avec cette droite.

8. Il suit de là que : 1° *tous les points d'une droite perpendiculaire à un plan ont la même projection sur ce plan* (3); 2° *la position d'un point n'est pas déterminée par la projection de ce point sur un seul plan.*

Nous allons voir maintenant que *la position d'un point est*, au contraire, *parfaitement déterminée, si l'on connaît les projections de ce point sur deux plans qui se coupent.* Mais d'abord, cherchons quelle est la relation qui existe entre ces deux projections.

9. *Les perpendiculaires abaissées des deux projections d'un point, sur l'intersection des deux plans de projection, rencontrent cette intersection en un même point.*

Pour démontrer cette proposition fondamentale, con-
Fig. 5. cevons deux plans xyz et xyt qui se coupent suivant la droite xy; si, d'un point A situé hors de ces plans, on leur mène des perpendiculaires AP, AP′; le plan PAP′, conduit par ces droites, sera perpendiculaire aux deux plans de projection; par suite, il sera perpendiculaire à l'intersection xy; donc cette droite xy sera perpendiculaire aux intersections PK, P′K du plan PAP′ avec les plans de projection. Les perpendiculaires menées sur l'intersection xy par les projections P et P′ du point A, passent donc par un même point K de cette intersection. Le principe énoncé est donc démontré.

10. *Lorsque deux points situés dans deux plans qui se coupent, sont tels que les perpendiculaires abaissées de ces points sur l'intersection des deux plans de projection, ren-*

contrent cette intersection en un même point, ces deux points sont les projections d'un même point de l'espace, lequel est entièrement déterminé.

En effet, les droites PK, P'K étant perpendiculaires à l'intersection xy en un même point K, le plan PKP' de ces deux droites est perpendiculaire à xy; donc il est perpendiculaire à chacun des plans xyz, xyt; les droites PA et P'A, menées par les points P et P' perpendiculairement aux plans xyz, xyt, sont donc situées dans le plan PKP'; et comme elles sont perpendiculaires à deux droites PK, P'K qui se coupent, ces perpendiculaires se coupent elles-mêmes en un point A qui a pour projections les points P et P' : ce qui démontre la proposition. Fig. 5.

11. D'après les deux principes précédents, *pour que deux points situés dans deux plans qui se coupent, soient les projections d'un même point de l'espace, il faut et il suffit que les perpendiculaires abaissées de ces points sur l'intersection des deux plans de projection rencontrent cette intersection en un même point.*

12. *Une droite est généralement déterminée, quand on connaît ses projections sur deux plans qui se coupent.*

Menons par chaque projection un plan perpendiculaire au plan de projection correspondant : la droite devra se trouver dans chacun des plans ainsi conduits; elle sera donc l'intersection de ces deux plans.

Par exemple, si ab, $a'b'$ sont les projections d'une droite inconnue, les plans abBA, $a'b'$BA menés par ces projections, et perpendiculaires respectivement aux plans xyz, xyt, contiendront la droite cherchée; cette droite sera donc l'intersection AB des deux plans. Fig. 6.

13. Deux droites prises arbitrairement dans les plans de projection ne peuvent être considérées comme les projections d'une même droite, que si les plans menés par ces droites, perpendiculairement aux plans de projection, se coupent. C'est ce qui arrivera toujours lorsque ces deux droites ne seront pas perpendiculaires, en deux points différents, à l'intersection des plans de projection.

Fig. 7. 14. Quand les droites ab, $a'b'$ sont perpendiculaires à xy et qu'elles coupent cette ligne en des points différents m et n, elles ne sont pas les projections d'une même droite. Pour le prouver, il suffit de faire voir que le plan amk conduit par am, perpendiculairement au plan xyz, est parallèle au plan $a'nh$ mené suivant $a'n$ perpendiculairement à xyt. En effet, de ce que les plans amk et xyz sont perpendiculaires entre eux, et de ce que xy est perpendiculaire à am, il s'ensuit que xy est perpendiculaire sur le plan amk. On démontrerait de la même manière que xy est perpendiculaire au plan $a'nh$; donc les deux plans amk, $a'nh$ sont perpendiculaires à la droite xy, et par conséquent ils sont parallèles.

Fig. 8. 15. Mais si les deux projections ab, $a'b'$, perpendiculaires à xy, rencontrent cette droite au même point m, alors le plan ama' de ces droites est perpendiculaire à la fois aux deux plans xyz, xyt; de sorte que toutes les droites situées dans ce plan ont pour projection ab et $a'b'$. Dans ce cas, pour achever de déterminer la droite de l'espace, il faut donner les projections a, a' et b, b' de deux de ses points.

16. *Les projections d'une courbe quelconque, faites sur deux plans qui se coupent, déterminent généralement cette courbe.*

Par exemple, *abc* et *a'b'c'* étant les projections d'une même ligne ABC sur les plans *xyz*, *xyt*; si l'on conçoit deux surfaces cylindriques *acb*BCA, *a'c'b'*BCA, ayant pour bases *a'b'c'* et *abc*, et dont les génératrices soient respectivement perpendiculaires aux plans *xyz*, *xyt*; l'intersection de ces surfaces cylindriques déterminera la courbe ABC. Fig. 9.

Lorsqu'on prend arbitrairement une courbe dans chacun des deux plans de projection, on ne peut considérer ces deux courbes comme les projections d'une même ligne de l'espace que dans le cas où les perpendiculaires aux plans de projection, menées par les différents points de ces deux courbes, se rencontrent deux à deux dans l'espace. En d'autres termes, *il faut qu'à chaque point de la première projection corresponde un point de la seconde* : nous nommons ici points *correspondants* ceux qui satisfont à la condition énoncée ci-dessus (11).

17. Pour déterminer un plan P, on pourrait se servir des projections, sur deux plans qui se coupent, de trois points non en ligne droite situés dans le plan P. Mais on a trouvé plus commode de fixer la position d'un plan au moyen de ses intersections αa, αb, avec les plans de projection *xyz*, *xyt*. Ces intersections sont ce qu'on nomme les *traces* du plan P sur les plans de projection. Fig. 10

Quand les deux traces αa, αb d'un plan sont données, la position de ce plan est entièrement déterminée; car deux droites qui se coupent déterminent un plan. En général, le plan P et les deux plans de projection forment un angle trièdre qui a pour arêtes les deux traces et l'intersection des deux plans fixes. Ainsi, *les deux traces d'un même plan doivent couper en un seul point l'intersection des plans de projection.*

18. Examinons quelques positions particulières du plan P.

1° *Si le plan est parallèle à l'un des plans de projection*, il est clair qu'*il n'aura pas de trace sur ce dernier plan. Sa trace sur l'autre plan de projection sera parallèle à l'intersection des plans de projection.*

2° *Si le plan coupe les deux plans de projection, mais qu'il soit parallèle à leur intersection, ses deux traces seront parallèles à cette intersection*

3° *Si le plan est perpendiculaire à l'intersection des deux plans de projection, ses deux traces seront aussi perpendiculaires à cette intersection.*

4° Enfin, *si le plan passe par l'intersection des deux plans de projection, sa position ne sera plus déterminée :* il faudra, ou bien donner sa trace sur un nouveau plan qui coupe les deux premiers suivant une droite autre que xy, ou bien donner un point situé hors de xy et par lequel le plan soit assujetti à passer.

19. On voit déjà, par ce qui précède, qu'en rapportant les points et les lignes de l'espace à deux plans qui se coupent, il est facile de déterminer ces points et ces lignes au moyen d'autres lignes et d'autres points situés dans ces plans.

Jusqu'à présent, nous n'avons fait aucune hypothèse particulière sur l'angle des deux plans de projection. Mais afin de rendre les constructions plus simples, nous supposerons, dorénavant, que cet angle est droit. Afin d'abréger le discours, nous regarderons l'un des deux plans de projection comme *horizontal* et l'autre comme *vertical*, quoiqu'ils

puissent avoir des positions quelconques. L'intersection des deux plans de projection se nommera *ligne de terre*.

20. Lorsque nous dirons qu'*un point est donné*, ou qu'*une ligne est donnée*, nous entendrons que *les projections de ce point ou de cette ligne sont données*. Lorsqu'*un plan* sera *donné*, *ses traces seront* supposées *connues*. Quand nous proposerons de *déterminer un point*, *ou une droite*, *ou un plan*, il s'agira de *construire les projections du point*, *ou celles de la droite*, *ou les traces du plan*.

Les projections et les traces prendront le nom du plan de projection dans lequel elles se trouveront. Ainsi, les projections et les traces situées dans le plan vertical seront les *projections* et les *traces verticales*. Suivant qu'une droite sera parallèle au plan horizontal de projection, ou qu'elle sera perpendiculaire à ce plan, nous dirons que cette ligne est *horizontale* ou qu'elle est *verticale*. On dit dans le même sens qu'un *plan* est *horizontal* ou qu'il est *vertical*, suivant qu'il est parallèle ou perpendiculaire au plan horizontal de projection.

21. De ce que les plans de projection sont supposés rectangulaires, il résulte ce qui suit :

1° *Si un point ou si une ligne est dans l'un des deux plans de projection, sa projection sur l'autre plan sera sur la ligne de terre.*

En effet, les perpendiculaires qui déterminent cette projection sont comprises dans le premier plan.

2° *Si une ligne est dans un plan parallèle à l'un des plans de projection, sa projection sur l'autre plan sera une droite parallèle à la ligne de terre.* Par exemple, si une ligne est dans un plan horizontal, les perpendiculaires qui

déterminent sa projection verticale sont renfermées dans ce plan horizontal; donc la projection verticale sera l'intersection de ce dernier plan avec le plan vertical de projection, c'est-à-dire une parallèle à la ligne de terre.

3° *Si un plan est perpendiculaire à l'un des deux plans de projection, sa trace sur l'autre plan sera perpendiculaire à la ligne de terre.*

Par exemple, un plan perpendiculaire au plan horizontal a pour trace verticale une perpendiculaire à la ligne de terre.

4° *La distance d'un point de l'espace au plan horizontal est égale à la perpendiculaire abaissée de sa projection verticale sur la ligne de terre*, et *la distance d'un point de l'espace au plan vertical est égale à la perpendiculaire abaissée de sa projection horizontale sur la ligne de terre.*

Fig. 5. Soit A un point dont les projections sont P et P′; par AP et AP′ faisons passer un plan qui coupe en K la ligne de terre; nous obtiendrons ainsi un rectangle APKP′. En effet, les angles APK, AP′K sont droits parce que AP et AP′ sont perpendiculaires sur les plans de projection, et l'angle PKP′ est droit parce qu'il mesure l'inclinaison des deux plans de projection, lesquels sont supposés perpendiculaires entre eux; donc le quadrilatère APKP′ est un rectangle; d'où il suit que AP=P′K et AP′=PK.

22. Les explications précédentes suffisent pour faire pressentir la possibilité de résoudre les problèmes qui se rapportent aux trois dimensions de l'étendue, par des constructions renfermées dans deux plans qui se coupent et que nous supposons rectangulaires. Mais afin de simplifier les constructions autant que possible, et de réunir les

deux projections sur un seul dessin, on fait tourner le plan vertical xyt autour de la ligne de terre xy, jusqu'à ce qu'il vienne en xyt' sur le prolongement du plan horizontal xyz. De cette manière, toutes les constructions seront réellement effectuées sur le plan horizontal; mais il faudra sans cesse concevoir par la pensée les projections verticales remises à leur place au moyen d'un quart de révolution autour de la ligne de terre. Quant aux points situés hors des plans de projection, ils ne paraîtront pas dans les figures; mais il sera facile de se représenter la véritable position de ces points, à l'aide de leurs projections. Fig. 11.

Par exemple, a et a' étant les projections d'un point A de l'espace, qui n'est pas indiqué dans la figure, on concevra que le plan vertical, que l'on suppose déjà rabattu sur le plan horizontal, fait un quart de révolution autour de xy; les plans de projection étant alors perpendiculaires l'un à l'autre, si par les points a, a' on conçoit des perpendiculaires au plan horizontal et au plan vertical, la rencontre de ces perpendiculaires sera le point A de l'espace, dont les projections sont a et a'. Fig. 12.

23. Après le rabattement du plan vertical sur le plan horizontal, *les deux projections d'un même point sont situées sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.*

En effet, concevons que les plans de projection xyz, xyt étant dans leurs positions primitives, c'est-à-dire perpendiculaires l'un sur l'autre, les projections d'un point A de l'espace soient a et a'; les perpendiculaires menées des points a et a' sur xy, passeront par un même point p de xy (9); si le plan vertical tourne autour de xy pour venir s'appliquer sur le plan horizontal, la droite $a'p$ ne Fig. 11.

cessera pas d'être perpendiculaire à xy; et quand le plan vertical xyt coïncidera avec le plan horizontal, le point a' sera en a'', à une distance $a''p$ du point p égale à $a'p$, et sur le prolongement de ap.

24. D'après cela, *pour que deux lignes se coupent dans l'espace, il faut et il suffit que le point de rencontre de leurs projections verticales et le point de rencontre de leurs projections horizontales se trouvent sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.*

25. *Lorsque deux droites* AB, CD *sont parallèles, leurs projections sur un même plan sont parallèles.*

FIG. 4. En effet, les plans projetants BAP et DCR sont parallèles entre eux comme étant perpendiculaires sur le même plan MN, et passant par deux droites parallèles; donc les intersections de ces plans avec le plan MN sont des droites parallèles. Or, ces intersections sont précisément les projections des lignes AB et CD; le principe est donc démontré.

Réciproquement, *si les projections de deux droites, sur deux plans qui se coupent, sont parallèles sur chacun de ces plans, ces deux droites sont parallèles;* car elles sont les intersections de deux plans projetants parallèles entre eux avec deux autres plans projetants parallèles entre eux.

26. *Lorsque deux droites* AB, CD *sont perpendiculaires entre elles, leurs projections sur un même plan ne sont pas nécessairement perpendiculaires entre elles.*

En effet, par le point A de la droite AB, on peut mener à cette droite une infinité de perpendiculaires qui toutes sont contenues dans un même plan P perpendiculaire à AB au point A. Lorsque ce plan P n'est pas en même temps perpendiculaire au plan de projection, ce qui arrive

toutes les fois que AB n'est pas parallèle à ce dernier plan; alors toutes les perpendiculaires à AB menées par le point A ont des projections différentes. Une seule de ces perpendiculaires a sa projection perpendiculaire à celle de la droite AB; c'est celle qui est contenue dans le plan projetant perpendiculaire à la projection de la droite AB.

Ainsi, lorsque deux droites AB et CD sont perpendiculaires l'une sur l'autre, leurs projections sont en général obliques. Seulement il résulte de ce qui vient d'être dit, que *si la droite* AB *est parallèle à l'un des plans de projection, la projection sur ce plan de la perpendiculaire* CD *sera perpendiculaire à la projection de* AB.

Enfin, *si la droite* AB *était parallèle aux deux plans de projection, c'est-à-dire parallèle à la ligne de terre*, alors seulement *les deux projections de la perpendiculaire* CD *seraient perpendiculaires aux projections de* AB.

27. *Lorsqu'une droite* AB *est parallèle à un plan* P, *les projections de* AB *ne sont pas nécessairement parallèles aux traces du plan.*

En effet, on sait que par un point A on peut mener une infinité de droites parallèles à un plan P, lesquelles sont toutes contenues dans un même plan Q parallèle au plan P. Toutes ces droites ont des projections différentes tant que le plan Q qui les renferme, et par conséquent le plan P parallèle à Q, n'est pas perpendiculaire au plan de projection. Une seule de ces droites a sa projection parallèle à la trace du plan P, c'est la parallèle à la trace de ce plan; car cette droite est parallèle au plan de projection, et par conséquent elle est parallèle à sa projection sur ce plan. Ainsi, lorsqu'une droite AB est parallèle à un plan

1° Nous supposerons que l'œil de l'observateur est placé au-dessus du plan horizontal ou en avant du plan vertical, et à une distance infinie du plan sur lequel se fait la projection.

2° Les parties d'un objet cachées à l'œil de l'observateur, soit par l'objet même, soit par les plans de projection seront supposées invisibles.

3° Les grandes lettres A, B, C, etc., indiqueront des points de l'espace; ces lettres ne paraîtront point dans les figures; les petites lettres correspondantes *a*, *b*, *c*, etc., employées sans accents, serviront à désigner les projections horizontales des points A, B et C; ces petites lettres affectées d'un accent, c'est-à-dire *a'*, *b'*, *c'*, etc., indiqueront les projections verticales des mêmes points A, B, C, etc.

4° Nous désignerons souvent un point de l'espace par ses deux projections; ainsi, lorsque nous parlerons d'un point (*a*, *a'*), il s'agira du point A dont les projections sont *a* et *a'*.

5° La ligne de terre sera toujours désignée par *xy*.

32. On nomme *épure* la feuille qui contient le tracé de toutes les constructions d'un problème.

On distinguera dans une épure :

1° Les lignes principales, c'est-à-dire celles qui représentent les données et les résultats d'un problème; elles seront marquées par un trait plein et continu, lorsqu'elles seront visibles; elles seront *ponctuées*, c'est-à-dire tracées en *points ronds*, si elles sont invisibles.

2° Les lignes auxiliaires, c'est-à-dire toutes celles qui ne seront employées que comme des moyens d'arriver à la solution du problème; ces lignes seront toujours *pointillées*

ou composées de petits traits d'égale longueur, qu'elles soient visibles ou invisibles.

Lorsque parmi ces lignes auxiliaires il s'en trouvera quelqu'une qui offrira plus d'importance, et sur laquelle on voudra appeler l'attention d'une manière particulière, on pourra la représenter par une *ligne mixte*, composée de petits traits séparés par un ou plusieurs points ronds.

CHAPITRE II.

Intersection des droites et des plans. — Droites et plans déterminés par diverses conditions.

PROBLÈME I.

Connaissant les projections d'une droite, trouver ses traces, c'est-à-dire les points où elle rencontre les plans de projection.

Fig. 14. 33. Supposons que les projections ab, $a'b'$ de la droite donnée coupent la ligne de terre aux points b et a'.

Pour trouver la *trace horizontale* de la droite, c'est-à-dire le point où elle perce le plan horizontal, on observe que ce point, appartenant au plan horizontal, doit avoir sa projection verticale sur la ligne de terre xy (21); cette projection doit aussi se trouver sur $a'b'$, projection verticale de la droite, car $a'b'$ contient les projections verticales de tous les points de la droite donnée; donc le point a', où $a'b'$ rencontre xy, est la projection verticale de la trace horizontale de la droite. Si donc on élève $a'a$ perpendiculaire sur xy, l'intersection a des droites aa' et ab sera la trace horizontale de la droite donnée. On verra de même que, si par le point b, où la projection horizontale ab rencontre la ligne de terre, on élève bb' perpendiculaire sur xy, son intersection b' avec la projection verticale $a'b'$, sera la trace verticale de la droite.

De ce qui précède, on tire cette règle générale : *pour déterminer la trace horizontale d'une droite, on prolonge la*

projection verticale jusqu'à la ligne de terre; par le point de rencontre on mène dans le plan horizontal une perpendiculaire à la ligne de terre : cette perpendiculaire va couper la projection horizontale de la droite au point cherché. Pareillement, *pour avoir la trace verticale de la droite, on prolonge la projection horizontale jusqu'à sa rencontre avec la ligne de terre; par le point ainsi obtenu on élève dans le plan vertical une perpendiculaire à la ligne de terre : cette perpendiculaire coupe la projection verticale de la droite au point demandé.*

34. Lorsqu'on change la position de la droite donnée, les points a et b' où elle perce les plans de projection changent aussi. Nous remarquerons d'abord les cas indiqués par les figures 14, 15, 16 et 17.

Dans la figure 14, la droite rencontre le plan horizontal en a en avant du plan vertical, et le plan vertical en b' au-dessus du plan horizontal.

Dans la figure 15, la trace horizontale a est derrière le plan vertical, et la trace verticale b' est au-dessus du plan horizontal.

Dans la figure 16, la trace horizontale a est devant le plan vertical, et la trace verticale b' est au-dessous du plan horizontal.

Dans la figure 17, la trace horizontale a est derrière le plan vertical, et la trace verticale b' est au-dessous du plan horizontal.

35. Examinons encore les cas particuliers suivants :

1° La droite est horizontale, c'est-à-dire située dans un plan parallèle au plan horizontal.

Il est évident que dans ce cas la droite a pour projection horizontale une droite quelconque telle que ab, et Fig. 18.

pour projection verticale une droite $a'b'$ parallèle à la ligne de terre. Sa trace verticale est en b'.

2° La droite est située dans un plan parallèle au plan vertical.

La droite donnée a pour projection verticale une droite
Fig. 19. quelconque telle que $a'b'$, et pour projection horizontale une droite ab parallèle à la ligne de terre. Sa trace horizontale est en a.

3° La droite donnée est parallèle à la fois aux deux plans de projection.

Il est clair que dans ce cas la droite est parallèle à la ligne de terre. Par conséquent, ses deux projections ab,
Fig. 20. $a'b'$, sont parallèles à xy. Elle n'a ni trace horizontale ni trace verticale.

4° La droite est contenue dans l'un des plans de projection, dans le plan horizontal, par exemple.

Fig. 21. Dans ce cas, la droite ab est elle-même sa projection horizontale; sa projection verticale est la ligne de terre; et elle a pour trace verticale le point b, où elle rencontre la ligne de terre.

5° La droite est perpendiculaire à l'un ou à l'autre des plans de projection, au plan horizontal, par exemple.

Fig. 22. D'après cette position de la droite, sa projection horizontale se réduit à sa trace horizontale a; sa projection verticale est $a'b'$ perpendiculaire à la ligne de terre. D'ailleurs, la droite n'a pas de trace verticale.

6° La droite est dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre.

Fig. 23. Lorsqu'un plan $a\alpha b'$ est perpendiculaire à la ligne de terre, ses deux traces $a\alpha$, $\alpha b'$ sont situées sur une même droite perpendiculaire à cette ligne. Toute droite située

dans ce plan a pour projections les traces du plan. Par conséquent, pour qu'une pareille droite soit déterminée, il faut que l'on donne les projections de deux de ses points. Supposons donc que m, m' et n, n' soient les projections de deux points de la droite. Faisons tourner le plan $a\alpha'b$ qui la contient, autour de sa trace horizontale $a\alpha$, jusqu'à ce qu'il soit rabattu sur le plan horizontal. Dans ce mouvement, chacun des points de la droite décrit dans l'espace une circonférence dont le plan est perpendiculaire à $a\alpha$, dont le centre est le pied de la perpendiculaire abaissée du point sur $a\alpha$, et dont le rayon est cette perpendiculaire. Il est facile de voir, d'après cela, qu'en décrivant, du point α comme centre, l'arc $m'm''$, menant mM parallèle à la ligne de terre, et m''M perpendiculaire à cette ligne, le point (m, m') sera rabattu en M. On obtiendrait de la même manière le rabattement N de l'autre point de la droite. Par conséquent, MN est le rabattement de la droite (mn, $m'n'$). Les points a et b'', où MN rencontre la trace horizontale du plan et la ligne de terre, sont les rabattements des traces horizontale et verticale de la droite.

Pour avoir ces traces elles-mêmes, il faut replacer le plan $a\alpha b'$ dans sa position primitive, en le faisant tourner de nouveau autour de αa; le point b'' se porte alors en b' sur un arc de cercle décrit de α comme centre avec $\alpha b''$ pour rayon.

Quant au point a qui appartient à l'axe $a\alpha$, il reste immobile. Nous obtenons ainsi, en a et en b', les traces horizontale et verticale de la droite.

PROBLÈME II.

Connaissant les deux traces d'une droite, trouver ses deux projections.

Fig. 14. 36. Soient a et b' les deux traces de la droite. La trace horizontale a est elle-même sa projection horizontale, et sa projection verticale est le pied a' de la perpendiculaire aa' abaissée du point a sur la ligne de terre. Semblablement, la trace verticale b' de la droite est elle-même sa projection verticale, et sa projection horizontale est au point b, intersection de xy avec la perpendiculaire $b'b$. Donc a et b, a' et b' sont les projections horizontales et verticales de deux points de la droite; donc ab, $a'b'$ sont les deux projections de cette droite.

PROBLÈME III.

Connaissant les projections de deux points, trouver les projections et la vraie grandeur de la droite qui joint ces deux points.

Fig. 25. 37 Soient a et a', b et b' les projections de deux points A et B; il est clair qu'en tirant les droites ab et $a'b'$, on a les projections de la droite AB qui joint dans l'espace les deux points. Pour avoir la véritable grandeur de cette droite, remarquons d'abord que les droites Aa, Bb, qui joignent les points A et B avec leurs projections horizontales a et b, sont verticales, et égales respectivement à aa' et $\beta b'$ (21, 4°); ces verticales forment avec ab et AB un trapèze dont le plan est vertical et dans lequel les angles en a et en b sont droits. Faisons tourner ce trapèze autour de ab jusqu'à ce qu'il soit venu se rabattre sur le plan hori-

zontal : les deux côtés verticaux du trapèze auront pour rabattement les droites *an*, *bm* perpendiculaires à *ab*, et respectivement égales à $\alpha a'$ et $\beta b'$. Quant à la droite inconnue AB, elle se rabattra suivant *mn*.

Cette construction peut être simplifiée ; car si l'on imagine par le point B une droite BC parallèle à *ab*, et terminée à la verticale *a*A, on formera ainsi un triangle rectangle ayant pour base BC, pour hauteur la différence des deux verticales *a*A, *b*B, et pour hypoténuse la distance cherchée AB. Il suit de là que si, par le point *a*, on mène *al* perpendiculaire à *ab* et égale à la différence entre $\alpha a'$ et $\beta b'$, et qu'ensuite on tire *bl*, cette droite sera égale à AB.

Pour indiquer, sur l'épure, que l'on prend $al = \alpha a' - \beta b'$, on mène $b'q$ parallèle à la ligne de terre ; on décrit, du point *q* comme centre, l'arc $a's$; on mène *st* perpendiculaire à *xy* ; on mène encore *at* parallèle à *xy* ; enfin, du point *a* comme centre, on décrit l'arc *tl*.

Cette seconde construction peut, à son tour, être notablement simplifiée. En effet, menons, comme tout à l'heure, $b'q$ parallèle à *xy* ; prenons, sur cette droite, $qp = ab$, et tirons $a'p$. Cette dernière droite sera encore égale à AB ; car le triangle rectangle $a'qp$ est évidemment égal à *lab*, c'est-à-dire égal au triangle ACB dans l'espace.

Si l'on raisonne, par rapport au plan vertical, comme on l'a fait relativement au plan horizontal, on obtiendra trois autres solutions du problème. Cela fait donc, en tout, six constructions différentes, qui doivent toutes donner le même résultat.

38. Examinons les cas particuliers suivants :

1° Le premier point est situé dans l'un des plans de projection ; le second point est quelconque.

Si le point A est situé en a dans le plan horizontal, sa projection horizontale sera a et sa projection verticale sera
Fig. 26. en a' sur la ligne de terre. On reconnaît facilement que dans ce cas la vraie grandeur de la droite AB, est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dans lequel les deux côtés de l'angle droit sont égaux à ab et $b'\beta$. Pour construire ce triangle sur le plan vertical, on prend $\beta a'' = ba$, ce qui se fait en menant bc parallèle à xy et égale à ab, et abaissant ca'' perpendiculaire sur xy. On joint ensuite les points a'' et b', et on obtient ainsi la droite $a''b'$, qui est la vraie distance de A à B.

On peut aussi obtenir la longueur de AB en faisant tourner autour de ab le triangle rectangle aBb, pour le rabattre sur le plan horizontal.

Ce triangle prend alors la position amb, et am est encore la vraie distance de A à B.

2° L'un des deux points est situé dans le plan horizontal, l'autre est dans le plan vertical.

Fig. 27 Soient a et b' les deux points donnés : les projections de la droite qui les joint sont ab et $a'b'$. On voit facilement que cette droite est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dans lequel les côtés de l'angle droit sont ab et bb', ou qu'elle est l'hypoténuse d'un autre triangle rectangle dans lequel les côtés sont aa' et $a'b'$. Si on fait tourner le premier triangle autour de ab pour le rabattre sur le plan horizontal, on obtient la droite am pour la vraie longueur de la droite qui joint les deux points donnés. Si, au contraire, on fait tourner l'autre triangle autour de bb' pour le rabattre sur le plan vertical, on obtient $b'n$ pour la vraie grandeur de la droite.

Comme vérification, les longueurs am et $b'n$ doivent être égales.

3° L'un des deux points est situé sur la ligne de terre; le second point est quelconque.

Supposons que le point donné A soit en a sur la ligne de terre, et que le point B ait pour projections b et b'. La droite AB est l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui a pour côtés ab et $b'\beta$, ou bien elle est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont ab' et $b\beta$. En rabattant le premier de ces triangles sur le plan horizontal ou le second sur le plan vertical, on obtient pour la vraie grandeur de AB les droites am et an. Fig. 28.

4° Les deux points A, B sont situés dans le même plan de projection, dans le plan horizontal, par exemple.

La droite qui les joint sur le plan horizontal, est la véritable grandeur de la droite AB.

5° Les deux points sont situés sur une même droite perpendiculaire à l'un des plans de projection, au plan horizontal, par exemple.

Dans ce cas, la droite $a'b'$ qui joint les projections verticales a' et b' des deux points, est la véritable grandeur de la droite AB. Fig. 29.

PROBLÈME IV.

Trouver, sur une droite donnée, un point qui soit à une distance donnée d'un point donné sur cette droite.

39. Soient cd, $c'd'$, les deux projections de la droite, $cc'd'$ le plan qui la projette sur le plan vertical. Faisons Fig. 24.

tourner ce plan autour de sa trace horizontale cc' pour le rabattre sur le plan horizontal : la trace horizontale c de la droite, appartenant à l'axe, reste immobile; quant à la trace verticale d', elle se rabat en d'' à l'intersection de la ligne de terre et de l'arc décrit du point c' comme centre avec $c'd'$ pour rayon. Le rabattement de la droite donnée est donc cd''. Pour avoir le rabattement du point donné, dont les projections sont a, a', on opère comme dans le problème III, et l'on trouve A pour ce rabattement. Prenons maintenant sur la droite, à partir de A, une distance AB égale à la longueur donnée : B sera le rabattement du point cherché. Les projections b et b' de ce point s'obtiennent, la première en menant par B une parallèle Bb à xy, la seconde en abaissant Bb'' perpendiculaire sur xy, et décrivant du point c', avec $c'b''$ pour rayon, l'arc de cercle $b''b'$.

La construction précédente comporte deux vérifications. D'abord, le point A, intersection de la parallèle aA et de la perpendiculaire a''A à xy, doit se trouver sur le rabattement cd'' de la droite donnée; ensuite les points b et b', obtenus comme nous l'avons indiqué, doivent se trouver sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.

PROBLÈME V.

Connaissant les traces de deux plans, construire les projections de leur intersection.

Fig. 30. 40. Soient αa, $\alpha a'$ les traces du premier plan, et βb, $\beta b'$ les traces du second plan. Il est clair que le point n où se

coupent les traces horizontales, et le point m' où se coupent les traces verticales, appartiennent à l'intersection des deux plans. Donc la droite qui dans l'espace joint le point n au point m', est cette intersection. Le point n étant sur le plan horizontal, il est lui-même sa projection horizontale; quant à sa projection verticale n', on l'obtient en abaissant nn' perpendiculaire sur la ligne de terre. Pareillement le point m' est lui-même sa projection verticale, et sa projection horizontale m se trouve en abaissant $m'm$ perpendiculaire à xy. Donc, en tirant les droites mn et $m'n'$ on aura les projections de l'intersection des deux plans.

41. Nous allons examiner les cas particuliers suivants :

1° L'un des plans donnés est perpendiculaire sur l'un des plans de projection, sur le plan horizontal, par exemple; l'autre plan est quelconque.

Le premier plan $a\alpha a'$ étant perpendiculaire au plan horizontal, a sa trace horizontale $a\alpha$ quelconque, et sa trace verticale $\alpha a'$ perpendiculaire à xy. L'intersection des deux plans a pour projection horizontale la trace horizontale $a\alpha$ du premier de ces plans, et pour projection verticale la droite $m'n'$, qu'on obtient comme dans le cas général. Fig. 31.

2° Les deux plans donnés sont perpendiculaires à un même plan de projection, au plan horizontal, par exemple.

Soient $a\alpha a'$, $b\beta b'$ les deux plans donnés. Si leurs traces horizontales αa, βb se coupent au point n, comme on le suppose dans l'épure, l'intersection des deux plans sera une perpendiculaire au plan horizontal, ayant pour projection horizontale le point n, et pour projection verticale la droite $n'm'$ perpendiculaire à xy. Fig. 32

3° L'un des plans est perpendiculaire à la ligne de terre; l'autre est quelconque.

Fig. 33. Le premier plan étant perpendiculaire à la ligne de terre, ses deux traces $b\beta$ et $b'\beta$ sont sur une même perpendiculaire à cette droite. Dans ce cas, l'intersection des deux plans a pour projections les traces de ce plan.

4° Les deux plans sont perpendiculaires à la ligne de terre.

Ils sont par conséquent parallèles, et il n'y a pas lieu à chercher leur intersection.

5° Le premier plan est parallèle à l'un des plans de projection, au plan horizontal, par exemple; le second plan est quelconque.

Le premier plan étant parallèle au plan horizontal, a
Fig. 34. pour trace verticale une droite pq parallèle à xy. L'intersection de ce plan avec le second plan $a\alpha a'$ doit être parallèle à la trace horizontale de celui-ci, parce que les intersections de deux plans parallèles par un troisième sont parallèles. Or, cette intersection a pour trace verticale le point m', qui se projette horizontalement en m; elle a donc pour projections les droites pq et mn, respectivement parallèles à xy et à $a\alpha$ (25).

6° L'un des plans donnés est parallèle au plan horizontal; l'autre est perpendiculaire à la ligne de terre.

Fig. 35. Soient pq et $a\alpha a'$ les deux plans donnés. L'intersection de ces deux plans est une parallèle à $a\alpha$ menée par le point m' où se coupent les traces verticales des deux plans. Donc elle a pour projection verticale le point m' et pour projection horizontale la droite $a\alpha$.

7° L'un des plans donnés est parallèle à la ligne de terre; l'autre est perpendiculaire à cette ligne.

Fig. 36. Soient ab, $a'b'$ les traces du plan parallèle à la ligne de terre; et soit $c\alpha c'$ le plan perpendiculaire à cette droite.

Les traces de l'intersection cherchée sont les points n, n'. Cette intersection a donc pour projections αn et $\alpha n'$.

8° L'un des plans est parallèle au plan horizontal, l'autre est parallèle à la ligne de terre.

Dans ce cas, la construction générale n'étant pas applicable, on cherche les intersections des deux plans donnés avec un plan auxiliaire, et l'on détermine le point de rencontre de ces deux droites. Ce point appartiendra nécessairement à l'intersection des deux plans donnés; et comme cette intersection doit être parallèle à la ligne de terre, elle sera complétement déterminée.

Ordinairement, on prend le plan auxiliaire perpendiculaire à la ligne de terre; on le considère alors comme un nouveau plan de projection sur lequel on cherche les traces des plans donnés; et de cette manière on est ramené au cas général. Cette solution est celle que nous allons développer.

Coupons les deux plans donnés par le plan auxiliaire $m\alpha n'$ perpendiculaire à xy. Cherchons les traces, sur ce plan, des deux plans donnés. Pour cela, observons que le point r', où $\alpha n'$ est rencontrée par la trace $p'q'$ du plan parallèle au plan horizontal, appartient à l'intersection de ce premier plan avec le plan auxiliaire, et que cette intersection est parallèle à αm. Si donc on fait tourner ce plan auxiliaire autour de αm pour le rabattre sur le plan horizontal, le point r' se rabattra en r, à une distance du point α égale à $\alpha r'$; et l'intersection du plan auxiliaire avec le premier des plans donnés aura pour rabattement la droite rs parallèle à αm : rs est donc, sur le plan auxiliaire de projection, la trace du plan $p'q'$. Les traces du second Fig. 37.

plan étant les droites ab, $a'b'$, parallèles à xy, on déterminera de la même manière la trace mn de ce plan sur le plan auxiliaire rabattu en $m\alpha n$. L'intersection k des droites rs et mn sera donc le rabattement d'un point de l'intersection des plans donnés. Si le plan $m\alpha n$ fait un quart de révolution autour de αm pour reprendre sa position verticale primitive, le pied o de la perpendiculaire ko à αm sera la projection horizontale du point qui était rabattu en k. L'intersection des deux plans donnés, déjà projetée verticalement en $p'q'$, aura donc pour projection horizontale la droite pq, menée par le point o parallèlement à xy.

9° Les deux plans sont parallèles à la ligne de terre.

Dans ce cas, comme dans celui qui précède, l'intersection est parallèle à la ligne de terre, et l'on est encore obligé de recourir à un plan auxiliaire.

Fig. 38. Soient (ab, $a'b'$) et (cd, $c'd'$) les deux plans donnés; coupons-les par le plan auxiliaire $n\alpha m'$ perpendiculaire à xy Les intersections des deux premiers plans avec le plan auxiliaire ont pour traces les points m, m' et n, n'. Elles ont pour rabattements, sur le plan horizontal, les droites sm et rn, lesquelles se coupent en o. Par suite, les projections h et h' du point o appartiennent aux projections de l'intersection des deux plans; et comme cette intersection doit être parallèle à la ligne de terre, les droites pq, $p'q'$, menées parallèlement à xy par h et h', sont les deux projections de l'intersection des plans donnés.

10° Les deux plans donnés ont leurs traces horizontales parallèles, et leurs traces verticales non parallèles.

Lorsque deux plans sont menés suivant deux droites parallèles, leur intersection est parallèle à ces droites; donc
Fig. 40. l'intersection des deux plans donnés $a\alpha a'$, $b\beta b'$ sera paral-

lèle aux traces horizontales $a\alpha$, $b\beta$; donc la projection horizontale mn de cette intersection est également parallèle à ces traces, et sa projection verticale $m'n'$ est parallèle à la ligne de terre.

11° Les traces des deux plans donnés sont respectivement parallèles entre elles, sans être parallèles à la ligne de terre.

Soient les traces $a\alpha$, $a'\alpha$ respectivement parallèles aux traces $b\beta$, $b'\beta$. Il est évident que les plans donnés sont parallèles, et qu'il n'y a pas lieu de chercher leur intersection.

12° Les deux plans donnés rencontrent la ligne de terre au même point.

La construction générale étant en défaut, on y supplée, comme dans les cas 8° et 9°, en coupant les deux plans donnés par un plan auxiliaire, et cherchant les projections du point commun aux intersections du plan auxiliaire avec les deux plans donnés : ce point appartient évidemment à l'intersection cherchée; et comme le point où ces mêmes plans rencontrent la ligne de terre appartient aussi à l'intersection, il s'ensuit que cette droite sera complétement déterminée.

La construction, qui ne diffère pas essentiellement de celle qui a été effectuée fig. 38, est indiquée dans la fig. 41; et l'on trouve pour intersection des plans $a\alpha a'$, $b\beta b'$, la droite projetée suivant αh, $\alpha h'$.

13° L'un des plans donnés est parallèle au plan horizontal; l'autre a ses deux traces en ligne droite (après le rabattement du plan vertical sur le plan horizontal).

Soient $x'y'$ le premier plan, et $m\alpha m'$ le second. Le point Fig. 42.
m', où se coupent les traces verticales des deux plans

donnés, est la trace verticale de leur intersection. D'ailleurs, cette droite doit être parallèle à αm (5°); donc les deux projections de l'intersection sont ns parallèle à αm, et $x'y'$ parallèle à xy.

14° Chacun des plans donnés a ses deux traces en ligne droite.

Fig. 43. Soient $a\alpha a'$, $b\alpha b'$ les deux plans. Le point m', où se rencontrent à la fois les traces verticales et les traces horizontales de ces deux plans, représente la trace verticale et la trace horizontale de l'intersection cherchée. Considéré comme *trace verticale* de l'intersection, ce point m' se projette horizontalement en m sur la ligne de terre. Au contraire, considéré comme *trace horizontale*, il a pour projection verticale le même point m. Conséquemment, l'intersection des deux plans donnés a ses deux projections confondues suivant la droite $m'mn$ perpendiculaire à xy. Cette intersection est donc contenue dans le plan nmm' perpendiculaire à la ligne de terre; elle perce les plans de projection, l'un en m, l'autre au point *rabattu* en m'. Conséquemment, elle est inclinée à 45° sur chacun de ces plans.

15°. Chacun des plans donnés a ses deux traces en ligne droite; et de plus, ces droites se coupent sur la ligne de terre.

Fig. 44. Tels sont, par exemple, les deux plans $a\alpha a'$ et $b\beta b'$. Pour obtenir leur intersection, on mène un plan auxiliaire $c\gamma c'$ parallèle à $b\beta b'$. L'intersection de ce plan auxiliaire avec le plan $a\alpha a'$ est une droite projetée suivant $m'm$ perpendiculaire à xy; donc l'intersection des deux plans donnés a pour ses deux projections la droite $p\alpha p'$ parallèle à $m'm$, et par conséquent perpendiculaire à xy. Cette intersection perce la ligne de terre en α; elle est perpendiculaire à la

ligne de terre; enfin elle est inclinée à 45° sur les plans de projection.

16° L'un des deux plans donnés est quelconque; l'autre passe par la ligne de terre et par un point donné hors de cette ligne.

Supposons qu'il s'agisse d'avoir l'intersection du plan $a\alpha a'$, avec le plan assujetti à passer par xy et par le point (m, m'). Si on coupe les deux plans donnés par un plan auxiliaire $a'\beta a$ perpendiculaire à xy et passant par le point donné (m, m'), et si l'on suppose que ce plan auxiliaire tourne autour de αa pour se rabattre sur le plan horizontal, son intersection avec le plan $a\alpha a'$ se rabattra suivant aa''. Quant à l'intersection du plan auxiliaire avec le second des plans donnés, on observe que cette intersection est la droite qui joint le point β au point (m, m'); donc elle a pour rabattement la droite βr; le point o, où se coupent les rabattements des intersections des deux plans donnés avec le plan auxiliaire, est le rabattement d'un point commun aux deux plans; et il n'y a plus qu'à déterminer les projections de ce point sur les plans primitifs. Fig. 45.

Or, si l'on abaisse oh perpendiculaire à βa, et qu'on ramène ho en $\beta h'$ sur $\beta a'$, les points h, h' seront les projections du point o. Donc les projections de l'intersection cherchée seront les droites αh, $\alpha h'$.

17° L'un des deux plans donnés est parallèle à la ligne de terre; l'autre passe par la ligne de terre et par un point donné.

Ce cas rentre dans l'un des précédents (9°), et il se résout de la même manière, c'est-à-dire au moyen d'un plan auxiliaire, perpendiculaire à la ligne de terre. Fig. 46.

18° L'un des deux plans donnés est parallèle au plan

horizontal; l'autre passe par la ligne de terre et par un point donné.

Fig. 47. Supposons que $x'y'$ soit la trace verticale du plan parallèle au plan horizontal de projection, et qu'on veuille avoir l'intersection de ce plan avec celui qui passe par la ligne de terre et par le point (m, m'). Il est clair que cette intersection est parallèle à la ligne de terre; qu'elle a pour projection verticale $x'y'$; et que, par conséquent, il suffit de construire un point de sa projection horizontale. C'est à quoi l'on parviendra au moyen du plan auxiliaire $m\beta m'$, perpendiculaire à la ligne de terre. On trouve ainsi, pour projection horizontale de l'intersection, la droite ao.

19° L'un des deux plans donnés a ses deux traces en ligne droite; l'autre passe par la ligne de terre et par un point donné.

Fig. 48. Le point α, où le plan $a\alpha a'$ rencontre xy, appartient nécessairement à l'intersection de ce plan et de celui qui passe par xy et par le point (m, m'). Pour avoir un second point de cette intersection, on conduit par (m, m') un plan $m\beta m'$, perpendiculaire à xy. Ce plan coupe les deux plans donnés suivant deux droites qui, en rabattement, sont les lignes $a'a''o$ et βro. Leur point de concours o est le rabattement d'un point commun aux deux plans donnés; et comme les projections de ce point sont h et h', les droites αh et $\alpha h'$ sont les projections de l'intersection demandée.

PROBLÈME VI.

Déterminer le point d'intersection de trois plans donnés.

42. Les trois plans donnés, combinés deux à deux, déterminent, par leurs intersections, trois droites qui doivent

passer par le point demandé. On cherche donc, par le problème précédent, les projections de ces trois droites; et quand les constructions sont faites exactement, les trois projections horizontales passent par un même point o, qui est la projection horizontale du point cherché O; les trois projections verticales se coupent aussi en un même point o', qui est la projection verticale du point O; et enfin la droite oo', qui passe par les deux projections du point O, est perpendiculaire à la ligne de terre. Ces constructions sont représentées sur la figure 49.

43. *Cas particuliers.* 1° Le premier plan est quelconque, le second est parallèle à la ligne de terre, et le troisième est horizontal.

Le premier plan nam' coupe le plan parallèle à la ligne de terre, et dont les traces sont ab, $a'b'$, suivant une droite qui a pour projections ns, rm'. Le même plan nam' coupe le plan horizontal $x'y'$ suivant une droite qui a pour projections les lignes qv, $x'y'$. Les points o et o' où les projections horizontales et verticales de ces deux droites se rencontrent, sont les projections du point demandé. Fig. 50.

Pour que la construction soit faite avec exactitude, il faut, comme cela a lieu dans la figure, que les projections horizontale et verticale de l'intersection des deux plans (ab, $a'b'$) et $x'y'$, passent respectivement par les deux points o et o'.

2° Le premier plan est horizontal, le second a ses traces en ligne droite, et le troisième passe par la ligne de terre et par un point donné.

J'engage le lecteur à faire l'épure de ce cas particulier.

3° Les trois plans ont leurs traces verticales parallèles entre elles.

Dans ce cas, les trois plans se coupent deux à deux suivant trois droites parallèles aux traces verticales, et, par conséquent, parallèles entre elles. Ils pourraient encore se couper tous les trois suivant une seule droite, parallèle à ces mêmes traces.

PROBLÈME VII.

Trouver le point d'intersection d'une droite et d'un plan.

44. Les constructions qu'il faut effectuer pour résoudre ce problème sont les suivantes : faire passer par la droite un plan quelconque ; chercher l'intersection de ce plan avec le plan donné ; et enfin déterminer le point de rencontre de cette intersection et de la droite donnée. Ce point est celui qui répond à la question.

Le plan auxiliaire que l'on fait passer par la droite peut avoir une position quelconque ; mais la construction étant plus simple quand ce plan est perpendiculaire à l'un des plans de projection, c'est cette solution que nous allons d'abord développer.

Fig. 51. 45. Soient αa, $\alpha a'$ les traces du plan donné, et bc, $b'c'$ les projections de la droite. Prenons pour plan auxiliaire le plan vertical qui projette la droite sur le plan horizontal : sa trace horizontale sera bc, et sa trace verticale sera bm' perpendiculaire à xy. Du point a, où les traces horizontales du plan auxiliaire et du plan donné se rencontrent, abaissons ap perpendiculaire à xy ; menons pm' : cette dernière droite sera la projection verticale de l'intersection des plans $a\alpha a'$ et cbm'. Or, la projection verticale du point

cherché doit se trouver sur pm' et sur la projection verticale $b'c'$ de la droite donnée; elle est donc en o'.

Quant à la projection horizontale du même point, elle sera évidemment en o, à l'intersection de la projection horizontale bc avec la perpendiculaire menée par le point o' à la ligne de terre.

Remarquons que l'on pourrait construire *directement* cette projection horizontale o, en coupant le plan $a\alpha a'$ par le plan $b'c'r$ qui projette la droite (bc, $b'c'$) sur le plan vertical.

Lorsque les constructions que nous venons d'indiquer auront été faites exactement, les deux droites qr, bc et la perpendiculaire $o'o$ à xy, passeront par un même point o.

46. Nous allons maintenant indiquer les constructions qu'il est nécessaire d'effectuer lorsque le plan auxiliaire qu'on fait passer par la droite donnée a une position quelconque. Pour qu'un plan contienne une droite, il suffit que les traces du plan passent par les traces de la droite; on commence donc par déterminer les traces c et c' de la droite Fig. 52. donnée (bc, $b'c'$); on les joint ensuite à un point β pris à volonté sur xy; et le plan $c\beta c'$ renferme la droite donnée. On cherche en troisième lieu l'intersection (hp, $h'p'$) du plan $c\beta c'$ avec le plan donné $a\alpha a'$, et les points o et o', où les projections de cette intersection coupent les projections de la droite donnée, sont les deux projections du point demandé.

Comme vérification, il faut que la droite oo', qui joint ces deux projections, soit perpendiculaire à xy.

47. *Cas particuliers.* 1° Le plan donné est quelconque; la droite est parallèle à la ligne de terre.

Fig. 53. Soient $a\alpha a'$ le plan donné, et (bc, $b'c'$) la droite donnée, laquelle est parallèle à la ligne de terre. Pour obtenir le point où la droite perce le plan, coupons celui-ci par le plan horizontal $b'c'$, lequel contient évidemment la droite donnée. L'intersection du plan auxiliaire avec le plan donné $a\alpha a'$, est parallèle à la trace horizontale de ce dernier plan, et ses projections sont $b'c'$ et pq parallèle à $a\alpha$. Le point o, où la projection horizontale pq de l'intersection coupe la projection horizontale bc de la droite donnée, est la projection horizontale du point demandé. Quant à sa projection verticale, on l'obtient en abaissant du point o une perpendiculaire sur xy, et en la prolongeant jusqu'à sa rencontre en o' avec la projection verticale $b'c'$ de la droite donnée.

On peut avoir une vérification en déterminant directement la projection verticale du point cherché. A cet effet, on mène par la droite donnée un plan perpendiculaire au plan horizontal; ce plan auxiliaire, qui est parallèle au plan vertical, coupe le plan donné $a\alpha a'$ suivant une droite (bc, ko') parallèle à $\alpha a'$; et le point o', où la projection verticale ko' de cette ligne rencontre $b'c'$, est la projection verticale du point demandé. Quand les constructions sont bien faites, les trois droites $b'c'$, ko' et oo' se coupent au même point o'.

2° Le plan donné est quelconque; la droite est horizontale.

Fig. 54. Le plan donné est $a\alpha a'$; la droite donnée a pour projection horizontale une droite quelconque bc, et pour projection verticale $b'c'$ parallèle à xy.

L'intersection du plan vertical auxiliaire cba' avec le plan donné $a\alpha a'$ a pour projection verticale la droite pa'; le point

o', où pa' rencontre $b'c'$, est la projection verticale du point cherché; sa projection horizontale est en o, à l'intersection de bc et de la perpendiculaire à xy menée par le point o'. En cherchant la projection horizontale ro de l'intersection du plan $a\alpha a'$ avec le plan qui projette la droite sur le plan vertical, on obtient une vérification tout à fait analogue à celle qu'on a obtenue dans le cas particulier précédent.

3° Le plan donné est quelconque; la droite est perpendiculaire à l'un des plans de projection, au plan horizontal, par exemple.

La droite donnée étant verticale, sa projection horizontale se réduit à un point o, qui est la projection horizontale du point cherché; et la projection verticale de cette droite est pq perpendiculaire à xy. Pour construire la projection verticale du point cherché, on mène un plan vertical dca' par la projection horizontale o de la droite donnée; ce plan reste indéterminé, car sa trace horizontale dc n'est assujettie qu'à passer par le point o; sa trace verticale ca' est perpendiculaire à xy. Si on abaisse dh perpendiculaire à xy, la droite ha' sera la projection verticale de l'intersection des plans $a\alpha a'$ et dca'; et le point o' de rencontre des lignes pq et ha' sera la projection verticale du point où la verticale donnée rencontre le plan $aa\alpha'$. Fig. 55.

Remarque. Le cas particulier que nous venons de traiter peut servir à résoudre cette question : *Connaissant l'une des projections d'un point situé dans un plan donné, trouver l'autre projection.* En effet, on peut considérer le point o comme la projection horizontale d'un point situé dans le plan donné $a\alpha a'$, et il est évident que ce dernier point doit être l'intersection du plan $a\alpha a'$ avec la verticale élevée en o.

4° La droite donnée est quelconque; le plan est horizontal.

Fig. 56. La droite (ab, $a'b'$) rencontre le plan horizontal $x'y'$ en un point (o, o'), dont la projection verticale est évidemment l'intersection de $a'b'$ et de $x'y'$. Il n'y a donc pas lieu de recourir à un plan auxiliaire.

5° La droite est quelconque; le plan est parallèle à la ligne de terre.

Fig. 57. On veut avoir l'intersection de la droite (ab, $a'b'$) avec un plan parallèle à xy et dont les traces sont pq, $p'q'$. On conçoit le plan qui projette la droite sur le plan vertical; ce plan a pour trace verticale $a'b'$ et pour trace horizontale $a's$ perpendiculaire à xy. L'intersection de ce plan avec le plan donné a pour projection verticale $a'b'$ et pour projection horizontale la droite st. Le point o, où cette ligne st rencontre la projection horizontale ab de la droite donnée, est la projection horizontale du point demandé. Si l'on veut obtenir directement la projection verticale de ce point, on fait passer par la droite donnée le plan qui la projette sur le plan horizontal; on cherche l'intersection de ce plan avec le plan donné; et le point o', où la projection verticale $h'r'$ de cette intersection coupe la projection verticale $a'b'$ de la droite donnée, est celui que l'on demande. Comme vérification, oo' doit être perpendiculaire à xy.

6° La droite est horizontale, le plan est parallèle au plan vertical de projection.

Fig. 58. La droite donnée étant horizontale, a pour projection horizontale une droite quelconque ab, et pour projection verticale $a'b'$ parallèle à xy; le plan donné, qui est parallèle au plan vertical, n'a qu'une seule trace, laquelle est pq parallèle à xy. Il est évident que le point o, où ab

et pq se coupent, est la projection horizontale du point où la droite perce le plan; sa projection verticale est o', point d'intersection de oh et de $a'b'$.

7° Le plan donné est quelconque; la droite est dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre.

Soient $a\alpha a'$ le plan donné, et $a\beta a'$ le plan perpendicu- Fig. 59.
laire à xy et dans lequel se trouve la droite donnée. Pour que cette droite soit déterminée, il faut que l'on donne les projections m, m' et n, n' (15) de deux de ses points. Cela posé, nous allons faire tourner le plan $a\beta a'$ autour de sa trace horizontale $a\beta$ pour le rabattre sur le plan horizontal, de manière à avoir sur ce dernier plan les rabattements de la droite donnée et de l'intersection des deux plans $a\alpha a'$, $a\beta a'$.

Il est facile de voir que MN est le rabattement de la droite donnée, et que l'intersection des plans $a\alpha a'$, $a\beta a'$, laquelle est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont $a\beta$ et $\beta a'$, a pour rabattement la droite ap. Le point o, où se coupent les lignes MN et ap, est le rabattement du point d'intersection de la droite et du plan donnés. Pour avoir les projections de ce point, il faut replacer le plan $a\beta a'$ dans sa position primitive en le faisant tourner de nouveau autour de $a\beta$, et on obtient ainsi les points h et h', projections du point cherché.

8° La droite donnée est quelconque; le plan a ses traces en ligne droite.

Soient $(ab, a'b')$ la droite donnée, et $c\alpha c'$ le plan donné. Fig. 60.
En joignant les traces a et b' de la droite donnée avec un point β pris arbitrairement sur xy, on obtient un plan $a\beta b'$ qui renferme la droite. L'intersection de ce plan avec le plan donné $c\alpha c'$ a pour projections les droites cp et $c'p'$.

Les points o, o', où elles rencontrent respectivement les deux projections ab, $a'b'$ de la droite donnée, sont les deux projections du point cherché.

La droite oo' doit toujours, comme vérification, être perpendiculaire à xy.

9° La droite donnée est parallèle à la ligne de terre; le plan a ses traces en ligne droite.

Fig. 61. Le plan horizontal $a'b'$, qui projette la droite sur le plan vertical, coupe le plan $c\alpha c'$ suivant une parallèle à $c\alpha$, laquelle a pour projection verticale $a'b'$, et pour projection horizontale la ligne $c''h$ parallèle à $c\alpha$. Le point o, où $c''h$ rencontre la projection horizontale de la droite donnée, est la projection horizontale du point cherché. Sa projection verticale est en o', à l'intersection de $a'b'$ et de oo'' perpendiculaire à xy.

Pour avoir une vérification, on conçoit le plan ab qui projette la droite donnée sur le plan horizontal; ce plan coupe le plan $c\alpha c'$ suivant une parallèle à $\alpha c'$, laquelle a pour projections ab et $c'''h'$ parallèles à $\alpha c'$. Pour que la construction soit faite avec exactitude, il faut que $c'''h'$ passe par le point o' déjà déterminé.

10° La droite est dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre; le plan a ses traces en ligne droite.

Fig. 62. Soit $a\alpha a'$ le plan donné, et soient (m, m'), (n, n') deux points de la droite donnée, laquelle est située dans le plan $m\beta m'$ perpendiculaire à xy. Si on fait tourner ce plan autour de sa trace horizontale $m\beta$, pour le rabattre sur le plan horizontal, on obtient MN pour le rabattement de cette droite. Quant au rabattement de l'intersection du plan $a\alpha a'$ avec le plan $m\beta m'$, comme la portion de cette intersection comprise entre les deux plans de projection est

l'hypoténuse d'un triangle rectangle isoscèle dont le côté est $\beta h'$, on l'obtient en décrivant du point β comme centre, avec $\beta h'$ pour rayon, l'arc $h'h$, et menant la droite $h'h$. Le point r, où se coupent les deux rabattements, est le rabattement du point cherché. Pour obtenir les deux projections o et o' de ce point, il suffit d'opérer comme nous l'avons fait plusieurs fois.

11° La droite est quelconque; le plan passe par la ligne de terre et par un point donné.

On veut avoir, par exemple, l'intersection de la droite (ab, $a'b'$) avec le plan qui passe par xy et par le point (m, m'). On cherche d'abord les traces a et b' de la droite donnée, on les joint à un point quelconque α de xy, et on obtient un plan $a\alpha b'$ dans lequel se trouve la droite. On cherche ensuite l'intersection de ce plan avec le plan donné. Pour cela, on emploie le plan $m\beta m'$ perpendiculaire à xy et passant par le point donné (m, m'). Ce plan auxiliaire coupe le plan $a\alpha b'$ suivant une droite qui a pour rabattement la ligne $c''c$; et il coupe le plan donné suivant une droite rabattue en βr. Les deux lignes $c''c$ et βr se rencontrent en un point k dont les deux projections sont o et o'; donc αo et $\alpha o'$ sont les projections de l'intersection du plan donné et du plan $a\alpha b'$ conduit par la droite donnée. Donc enfin, les points s et s', où αo et $\alpha o'$ coupent respectivement les projections ab et $a'b'$ de la droite donnée, sont les deux projections du point demandé. Fig. 63.

Comme vérification, la droite ss' doit être perpendiculaire à xy.

12° La droite est horizontale; le plan passe par la ligne de terre et par un point donné.

Soit (ab, $a'b'$) la droite horizontale dont on veut avoir Fig. 64.

l'intersection avec le plan qui passe par xy et par le point donné (m, m'). Concevons le plan horizontal $a'b'$ qui projette la droite sur le plan vertical, et cherchons son intersection avec le plan donné. Cette intersection est évidemment parallèle à xy; donc il suffit de pouvoir en déterminer un point. A cet effet, menons le plan $m\beta m'$ perpendiculaire à xy et passant par le point (m, m'); ce plan coupe le plan horizontal $a'b'$ suivant une perpendiculaire au plan vertical, projetée en c', et rabattue en $c''o$; et il coupe le plan donné suivant une droite rabattue en βr. Le point o, où se coupent les lignes $c''o$ et βr, est le rabattement d'un point de l'intersection des deux plans. Il est facile de voir que ce point a pour projections les points c et c'; de sorte que les droites $a'b'$ et sco, parallèles à xy, sont les projections de l'intersection du plan donné avec le plan horizontal $a'b'$.

Le point s d'intersection des droites sco et ab est la projection horizontale du point cherché; sa projection verticale est en s' à l'intersection de $a'b'$ et de la perpendiculaire à xy menée par le point s.

PROBLÈME VIII.

Par un point donné, mener une parallèle à une droite donnée.

Fig. 65. 48. Soient c, c' les projections du point donné, et ab, $a'b'$ les projections de la droite donnée. La droite cherchée passant par le point donné, les projections de cette ligne doivent passer par les projections c, e' du point donné; d'ailleurs, les projections de deux droites parallèles sont parallèles (25). On construira donc les projections de la droite

demandée en menant, par les projections c, c' du point donné, des parallèles cd, $c'd'$ aux projections ab, $a'b'$ de la droite donnée.

PROBLÈME IX.

Connaissant l'une des projections d'une droite située dans un plan donné, trouver l'autre projection de cette droite.

49. Supposons, par exemple, qu'on donne la projection horizontale de la droite, et imaginons qu'on élève un plan vertical par cette projection : il est clair que l'intersection de ce plan avec le plan donné sera la droite dont on veut trouver la projection verticale. La question se réduit donc à déterminer l'intersection du plan donné avec un plan vertical.

Soient $c\beta c'$ le plan donné, ab la projection horizontale donnée. Le plan vertical élevé suivant ab a pour trace horizontale la droite ab, et pour trace verticale la ligne bb' perpendiculaire à xy. Il coupe le plan donné suivant une droite qui a pour projections ab, $a'b'$; donc $a'b'$ est la projection verticale demandée. Fig. 66.

50. *Cas particuliers.* 1° Le plan est perpendiculaire au plan vertical de projection.

Alors la projection verticale de la droite se confond avec la trace verticale du plan.

2° Le plan est perpendiculaire à la ligne de terre.

Dans ce second cas, la droite dont on donne l'une des deux projections, est tout à fait indéterminée.

PROBLÈME X.

Faire passer un plan par trois points donnés.

51. Pour résoudre ce problème, on joint deux à deux les trois points donnés; on obtient ainsi trois droites qui sont tout entières dans le plan cherché. On détermine les points où ces trois droites rencontrent les plans de projection : on connaît alors trois points de chacune des traces du plan. Si les constructions ont été faites exactement, les trois points appartenant à chaque trace devront être en ligne droite, et les deux traces devront se couper en un même point de la ligne de terre; ce qui fournira trois vérifications.

Dans la pratique, on se contente de construire les projections de deux des trois droites, et de chercher une seule trace de l'une de ces deux droites et les deux traces de l'autre.

Fig. 67. Soient a, b, c les projections horizontales des trois points donnés, et a', b', c' les projections verticales des mêmes points. Les trois droites AB, AC, BC qui, dans l'espace, joignent deux à deux les trois points donnés, ont pour projections horizontales ab, ac, bc, et pour projections verticales $a'b'$, $a'c'$, $b'c'$. Ces droites percent le plan horizontal aux points m, n, p, et le plan vertical aux points q, r, s. Par conséquent, la trace horizontale du plan cherché passe par les points m, n, p; la trace verticale passe par les points q, r, s; et si la construction a été faite avec exactitude, ces deux traces doivent couper la ligne de terre en un même point α.

52. *Cas particuliers.* 1° Si l'une des trois droites qui

joignent les points deux à deux est parallèle à l'un des plans de projection, au plan horizontal, par exemple, elle n'a pas de trace horizontale; mais, dans ce cas, le plan cherché, passant par cette droite horizontale, coupe le plan horizontal suivant une parallèle à cette même droite; d'où il résulte que la trace horizontale du plan est parallèle à la projection horizontale de la droite. On a ainsi une nouvelle vérification.

2° Quand une des droites est parallèle à la ligne de terre, le plan cherché est lui-même parallèle à la ligne de terre; par conséqnent, ses deux traces doivent être parallèles à la ligne de terre. D'ailleurs, elles doivent contenir les traces des deux autres droites.

3° Si les trois droites étaient parallèles à l'un des plans de projection, au plan horizontal, par exemple, le plan de ces droites, qui est celui des trois points donnés, serait horizontal; sa trace verticale serait donc parallèle à la ligne de terre et passerait par les projections verticales des trois points donnés.

PROBLÈME XI.

Faire passer un plan par deux droites qui se coupent, ou par deux droites parallèles.

53. Ce problème rentre dans celui que nous venons de traiter; car si on cherche les traces des deux droites, qu'on joigne les traces horizontales par une droite, et qu'on opère de même pour les traces verticales, on aura les deux traces du plan demandé. Comme vérification, il faut que ces traces se coupent en un même point de la ligne de terre.

54. *Cas particuliers.* 1° Les deux droites données sont parallèles à la ligne de terre.

Dans ce cas particulier, la construction générale qui vient d'être indiquée est en défaut, mais alors le plan cherché doit être parallèle à la ligne de terre, et, par conséquent, ses traces doivent être parallèles à cette ligne (18). Il suffit donc de trouver un point de chacune de ces traces. A cet effet, on prend un point sur l'une des droites et un point sur l'autre; on joint ces deux points, et la droite qu'on obtient étant tout entière dans le plan cherché, ses points de rencontre avec les deux plans de projection déterminent un point de chacune des traces du plan demandé.

Fig. 69. Soient donc ab, $a'b'$ les projections de l'une des droites, et cd, $c'd'$ les projections de l'autre droite; on prend deux points quelconques m et n sur les projections horizontales cd et ab; de ces points on abaisse des perpendiculaires à xy et on les prolonge jusqu'à leur rencontre en m' et n' avec les projections verticales des deux droites données. On obtient ainsi deux points (m, m') et (n, n'), qui appartiennent respectivement aux deux droites données. La droite menée par ces deux points est tout entière dans le plan demandé; par conséquent, les traces h et v' de cette droite appartiennent aux traces de ce plan, qu'on détermine en menant par les points h et v' des parallèles hq et $v'p$ à la ligne de terre.

2° Les deux droites données se coupent en un point α, situé sur la ligne de terre.

La construction générale est encore en défaut; mais le plan cherché devant passer par le point α, il suffit de trouver un autre point de chacune de ses traces; pour cela, on

prend un point sur chacune des deux droites données; on les joint par une droite, dont les traces sont les deux points cherchés. La construction est effectuée dans la figure 70.

PROBLÈME XII.

Par un point donné et par une droite donnée, faire passer un plan.

55. Le plan cherché devant renfermer le point donné et la droite donnée, contiendra la parallèle à cette droite, qui serait menée par le point donné. Si donc on mène cette parallèle, on sera ramené au problème précédent, c'est-à-dire, à faire passer un plan par deux droites parallèles.

Le point donné a pour projections o, o', et la droite donnée est $(ab, a'b')$; la parallèle à cette droite, menée par le point O, a pour projections cd, $c'd'$; les traces horizontales des deux droites sont a et c, et leurs traces verticales sont b' et d'; par conséquent, le plan cherché a pour trace horizontale ac, et pour trace verticale $b'd'$. Comme vérification, ces deux traces doivent se couper en un même point α de xy. Fig. 68.

Au lieu de mener, par le point donné, une parallèle à la droite donnée, on pourrait faire passer par ce point une droite quelconque, coupant la droite donnée en un point. On retomberait ainsi sur le premier cas du problème XI.

PROBLÈME XIII.

Par une droite donnée, faire passer un plan parallèle à une droite donnée.

56. On sait que si une droite est parallèle à une droite située dans un plan, elle est parallèle à ce plan. Si donc on

Fig. 71. prend un point (o, o') sur la première droite (cd, $c'd'$); que par ce point on mène une parallèle (pq, $p'q'$) à la seconde droite (ab, $a'b'$); et qu'on fasse passer un plan $q'\alpha d$ par la première droite et par la parallèle à la seconde, on aura le plan demandé.

57. *Cas particulier.* La première droite est quelconque; la seconde est parallèle à la ligne de terre.

Il est clair que, dans ce cas, le plan cherché doit être parallèle à la ligne de terre; donc ses traces sont parallèles à cette ligne. Et comme ces traces passent par celles de la droite donnée, elles sont complétement déterminées.

PROBLÈME XIV.

Par un point donné, mener un plan parallèle à deux droites données.

58. Si par le point donné on mène des parallèles aux deux droites données, on aura deux droites qui seront tout entières dans le plan cherché, et dont les traces suffiront pour déterminer les traces de ce plan.

L'épure est la même que celle du problème XIII.

PROBLÈME XV.

Mener, par un point donné, une droite qui rencontre deux droites données.

59. Faisons passer deux plans, l'un par le point donné et la première droite, l'autre par le point donné et la seconde droite; construisons ensuite l'intersection de ces deux plans. Cette intersection est une droite qui passe par le point donné et qui rencontre les deux droites données; elle est donc la droite demandée.

Soient o et o' les projections du point donné, et soient ab et $a'b'$, cd et $c'd'$ celles des deux droites. Si on effectue les constructions qui viennent d'être indiquées, on trouve que les traces du plan qui passe par le point (o, o') et par la droite $(ab, a'b')$, sont $p\alpha$ et $\alpha q'$; que les traces du plan qui passe par le point (o, o') et par la droite $(cd, c'd')$, sont $s\beta$ et $\beta r'$; et que l'intersection des deux plans a pour projections kh et $k'h'$. Cette intersection doit satisfaire aux trois conditions suivantes : 1° elle doit passer au point donné; ce qui exige que ses projections kh, $k'h'$ passent respectivement par les projections o, o' du point; 2° elle doit rencontrer la première droite donnée $(ab, a'b')$; ce qui exige que les points i et i', où se coupent les projections horizontales et les projections verticales de ces deux droites, se trouvent sur une même perpendiculaire ii' à xy; 3° elle doit pareillement rencontrer la seconde droite donnée; et il faut pour cela que les points de rencontre v et v' des projections horizontales kh, cd et des projections verticales $k'h'$, $c'd'$ soient sur une même perpendiculaire vv' à xy. Fig. 72.

60. *Cas particulier.* J'engage le lecteur à traiter le cas particulier suivant : mener, par un point donné, une droite qui rencontre une droite parallèle au plan horizontal, et une droite parallèle à la ligne de terre.

PROBLÈME XVI.

Par un point donné, mener un plan parallèle à un plan donné.

61. Prenons, dans le plan donné, une droite quelconque, et menons par le point donné une parallèle à cette droite. Cette parallèle devra être tout entière dans le plan cher-

ché; par suite, ses traces détermineront un point de chacune des traces de ce plan; et comme ces dernières traces doivent être parallèles à celles du plan donné, elles seront complétement déterminées.

Fig. 73. Soient (o, o') le point donné, et $a\alpha a'$ le plan donné. On prend à volonté un point n sur la trace horizontale $a\alpha$ de ce plan, et un point m' sur sa trace verticale $\alpha a'$; on construit les projections mn, $m'n'$ d'une droite ayant pour traces les points n, m' (problème II) : cette droite est située dans le plan $a\alpha a'$. Par les projections o et o' du point donné, on mène bc, $b'c'$ respectivement parallèles à mn, $m'n'$, et l'on a ainsi les projections d'une droite située dans le plan cherché. En construisant les traces c, b' de cette droite et en menant par ces traces des droites $c\beta$, $b'\beta$ respectivement parallèles à $a\alpha$, $\alpha a'$, on a les traces du plan demandé. Si le plan donné n'est pas parallèle à la ligne de terre, ce qu'on suppose ici, les deux traces $c\beta$, $b'\beta$ doivent concourir en un même point β de cette ligne.

62. La construction que nous venons d'indiquer peut être simplifiée, quand le plan donné n'est pas parallèle à la ligne de terre. En effet, au lieu de mener par le point
Fig. 74. (o, o') une parallèle à une droite quelconque située dans le plan donné $a\alpha a'$, menons par ce point une parallèle à la trace horizontale $a\alpha$ de ce plan. La projection horizontale de cette parallèle est la droite od parallèle à $a\alpha$, et sa projection verticale est $o'd'$ parallèle à xy. La trace verticale d' de la droite $(od, o'd')$ est un point de la trace verticale du plan cherché; on obtient donc les deux traces de ce plan en menant par d' la parallèle $b'\beta$ à $\alpha a'$, et menant ensuite βb parallèle à αa.

63. *Cas particuliers.* 1° Le plan donné est parallèle à l'un des plans de projection, au plan horizontal, par exemple.

Le plan cherché doit être horizontal; donc il n'a pas de trace horizontale; et sa trace verticale $e'd'$ s'obtient en menant, par la projection o' du point donné, une parallèle à xy. Fig. 75.

2° Le plan donné est parallèle à la ligne de terre.

Soient o, o' les deux projections du point donné, et ab, $a'b'$ les deux traces du plan donné. En appliquant la construction générale, on trouve que les traces du plan cherché sont qh et $p'k'$ parallèles à xy. Fig. 76.

3° Le plan donné a ses traces en ligne droite.

Soient (o, o') le point donné, et $a\alpha a'$ le plan donné. Si on mène par (o, o') une parallèle à la trace horizontale $a\alpha$ du plan $a\alpha a'$, cette parallèle aura pour projection horizontale oc parallèle à $a\alpha$, et pour projection verticale $o'c'$; d'où il suit que la parallèle $c'\beta d$ à $a'\alpha a$, détermine le plan demandé. Si l'on veut avoir une vérification, on peut chercher directement un point de la trace horizontale, comme on en a trouvé un de la trace verticale; c'est-à-dire qu'on mènera par le point donné une parallèle à $\alpha a'$, laquelle a pour projections od et $o'd'$, et qu'on déterminera la trace horizontale d de cette parallèle. Le point d appartient à la trace horizontale du plan cherché; et, comme vérification, il doit se trouver sur la droite $c'\beta d$. Fig. 77.

4° Le plan donné passe par la ligne de terre et par un point donné.

Supposons que, par le point donné (o, o'), on veuille conduire un plan parallèle à celui qui passe par xy et par le point donné (m, m'). Fig. 78.

Le plan donné contenant la ligne de terre xy, il est clair

que le plan cherché est parallèle à xy, et que par conséquent il a ses traces parallèles à cette droite. Il suffit donc de trouver un point de chacune des traces de ce plan pour qu'il soit entièrement déterminé. A cet effet, on prend un point quelconque α de xy, on le joint au point (m, m'), et on obtient une droite $(\alpha m, \alpha m')$, située dans le plan donné. Donc la parallèle $(oc, o'c')$ à cette droite, menée par le point (o, o'), est tout entière dans le plan cherché. Donc les traces de ce plan sont les droites hp, vq menées parallèlement à xy par les traces h, v de la droite $(oc, o'c')$.

CHAPITRE III.

Droites et plans perpendiculaires.

PROBLÈME XVII.

Abaisser, d'un point donné, une perpendiculaire sur un plan donné, et déterminer ensuite le pied et la véritable grandeur de cette perpendiculaire.

64. Soient o, o' les deux projections du point donné, et $a\alpha a'$ le plan donné. Comme les projections d'une droite perpendiculaire sur un plan sont respectivement perpendiculaires aux traces de ce plan (28), on obtiendra les projections de la droite demandée, en menant, par les points o, o', des perpendiculaires or, $o'r'$ aux traces $a\alpha$, $\alpha a'$ du plan donné. Pour déterminer les projections p, p' du pied de la perpendiculaire, on cherche le point P de rencontre de la perpendiculaire OP avec le plan $a\alpha a'$. Enfin on trouve facilement (37) la vraie grandeur $o's'$ de la distance entre le point donné (o, o') et le pied (p, p') de cette perpendiculaire. Fig. 79.

65. *Cas particuliers.* 1° Le plan donné est parallèle à l'un des plans de projection, au plan horizontal, par exemple.

Soient (o, o') le point donné, et $a'b'$ la trace verticale du plan donné. Comme ce plan est horizontal, la perpen- Fig. 80.

diculaire demandée est verticale; donc elle a pour projection horizontale le point o, et pour projection verticale la droite $o'p'$ perpendiculaire à xy. De plus, comme elle est parallèle au plan vertical, elle se projette sur ce plan en vraie grandeur.

2° Le plan donné est parallèle à la ligne de terre.

Fig. 81. Soient (o, o') le point donné, et ab, $a'b'$ les traces du plan parallèle à xy. Les projections de la perpendiculaire demandée seront évidemment confondues suivant la droite oo' perpendiculaire à xy. Pour déterminer le pied et la vraie grandeur de la perpendiculaire, on fait passer par (o, o') le plan $m\beta m'$ perpendiculaire à xy : ce plan sera perpendiculaire au plan donné. Si donc on cherche l'intersection de ces deux plans, et que du point (o, o') on abaisse une perpendiculaire sur cette intersection, on aura la droite cherchée.

Pour effectuer ces constructions, on rabat le plan $m\beta m'$ sur le plan horizontal, comme cela est indiqué sur la figure. On obtient facilement ainsi les points p et p', projections du pied de la perpendiculaire, et la droite rs, laquelle est la vraie grandeur de cette ligne.

3° Le plan donné est perpendiculaire à l'un des plans de projection, par exemple, au plan horizontal.

Fig. 82. Soient (o, o') le point donné, et $a\alpha a'$ le plan donné. On abaisse, des points o, o', les perpendiculaires op, $o'p'$ sur les traces $a\alpha$, $\alpha a'$ du plan donné, et on obtient ainsi les deux projections de la droite cherchée. Le pied de cette droite est évidemment projeté en p sur le plan horizontal: donc il a pour projection verticale le point p'. Quant à la vraie grandeur de la perpendiculaire, elle est égale à

la projection horizontale op, attendu que cette perpendiculaire (op, $o'p'$) est horizontale.

4° Le plan donné est perpendiculaire à la ligne de terre.

Les parallèles op, $o'p'$ menées à la ligne de terre par les projections o, o' du point donné, sont évidemment les deux projections de la perpendiculaire demandée. Les points p, p', où ces parallèles coupent les traces $a\alpha$, $\alpha a'$ du plan donné, sont les projections du point où elle perce le plan. Enfin, la perpendiculaire est représentée, en vraie grandeur, par l'une quelconque op ou $o'p'$ de ses projections, puisqu'elle est parallèle aux deux plans de projection. Fig. 83.

5° Le plan donné a ses traces en ligne droite.

La méthode générale est applicable. Elle donne lieu à l'épure 84, dans laquelle on a construit directement les projections p et p' du pied de la perpendiculaire abaissée du point (o, o') sur le plan $a\alpha a'$. La vraie grandeur de cette droite est $p'k'$.

6° Le plan donné passe par la ligne de terre et par un point donné.

Soit (o, o') le point donné; et supposons qu'on veuille abaisser de ce point une perpendiculaire sur le plan qui passe par xy et par le point (m, m'). Il est clair que la droite cherchée sera contenue dans le plan $o\beta o'$ perpendiculaire à la ligne de terre, et que l'on obtiendra les projections p, p' du pied de cette droite, au moyen d'un rabattement. La construction, qui rentre dans celle du cas (2°), est effectuée fig. 85. Fig. 85.

La vraie grandeur de la perpendiculaire est d'ailleurs représentée par la ligne OP.

PROBLÈME XVIII.

Mener, par un point donné, un plan perpendiculaire à une droite donnée.

Fig. 86. 66. Soient o, o' les projections du point donné, et ab, $a'b'$ les projections de la droite donnée. D'un point quelconque α de la ligne de terre, abaissons des perpendiculaires αm, $\alpha m'$ sur les projections de la droite : ces perpendiculaires sont les traces d'un plan $m\alpha m'$ perpendiculaire à cette droite. Si donc nous faisons passer par le point donné (o, o'), un plan $b\beta b'$ parallèle à $m\alpha m'$, ce plan sera le plan demandé.

67. *Remarque.* En menant, par le point donné, une parallèle à la trace horizontale du plan cherché, c'est-à-dire une horizontale perpendiculaire à la droite donnée, on aura une droite située dans ce plan. Si donc on détermine la trace verticale v' de cette parallèle, on n'aura pas besoin de construire le plan auxiliaire $m\alpha m'$.

68. *Cas particuliers.* 1° La droite est parallèle à l'un des plans de projection, au plan horizontal, par exemple.

Fig. 87. Soient (o, o') le point donné, et ab, $a'b'$ les deux projections de la droite donnée. Cette droite étant supposée horizontale, le plan cherché sera vertical; donc sa trace horizontale passera par la projection horizontale o du point donné. D'ailleurs, les deux traces doivent être respectivement perpendiculaires aux deux projections de la droite : elles sont donc complétement déterminées.

2° La droite donnée est perpendiculaire à l'un des plans de projection, au plan horizontal, par exemple.

Soient (o, o') le point donné, a la projection horizontale,

et $a'b'$ la projection verticale de la droite donnée. Le plan horizontal de projection et le plan cherché sont parallèles, comme étant tous les deux perpendiculaires à la droite donnée. On obtient donc la trace verticale du plan cherché, et par suite ce plan lui-même, en menant par la projection verticale o' du point donné, $p'q'$ parallèle à xy.

3° La droite donnée est située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre.

Soient (o, o') le point donné, et cac' le plan perpendiculaire à la ligne de terre, dans lequel se trouve la droite donnée. Pour que cette droite soit déterminée, il faut que l'on connaisse les projections m, m' et n, n' de deux de ses points. Le plan cherché devant être perpendiculaire à la droite $(mn, m'n')$, il s'ensuit que les traces de ce plan sont parallèles à la ligne de terre. Donc le plan cherché est lui-même parallèle à la ligne de terre. C'est ce que l'on peut reconnaître d'une autre manière, en imaginant, par le point (o, o'), une perpendiculaire au plan cac'. Cette perpendiculaire, dont les projections oc, $o'c'$ sont perpendiculaires à cc', sera parallèle à xy; d'ailleurs, elle est contenue tout entière dans le plan cherché : ce plan est donc parallèle à la ligne de terre. FIG. 89.

Pour achever de le déterminer, il suffit de trouver un point de sa trace horizontale et un point de sa trace verticale. A cet effet, menons, par le pied (c, c') de la droite $(oc, o'c')$, une perpendiculaire à la droite donnée : cette nouvelle perpendiculaire sera encore située dans le plan cherché, et ses traces appartiendront aux traces de ce plan. Mais, comme cette droite a ses projections confondues suivant cac', il faut, pour la déterminer, recourir à un rabattement.

Supposons donc que nous fassions tourner le plan $c\alpha c'$ autour de sa trace horizontale $c\alpha$, jusqu'à ce qu'il vienne se confondre avec le plan horizontal de projection. Nous obtiendrons, par la construction ordinaire, les rabattements MN et C de la droite donnée et du point (c,c'). Abaissons CP perpendiculaire à MN et prolongeons cette droite jusqu'à ce qu'elle coupe xy en V et $c\alpha c'$ en H; les points V et H seront les rabattements des points où la perpendiculaire abaissée du point (c, c') sur $(mn, m'n')$ perce les plans de projection. Si donc nous ramenons V en v, et que par les points H et v nous menions $\beta\gamma$ et $\delta\alpha$ parallèles à la ligne de terre, ces deux droites seront les traces du plan cherché.

4° La droite donnée est perpendiculaire à la ligne de terre.

Ce cas rentre dans le précédent. Les constructions sont effectuées dans la figure 90.

PROBLÈME XIX.

Construire la plus courte distance d'un point donné à une droite donnée.

Fig. 91. 69. Par le point donné O, dont les projections sont o, o', on mène un plan $b\beta b'$ perpendiculaire à la droite donnée $(ab, a'b')$; on détermine les projections p, p' du point P où la droite donnée perce le plan; la droite OP, projetée suivant op, $o'p'$, sera perpendiculaire à la droite donnée; donc elle sera la plus courte distance du point (o, o') à $(ab, a'b')$. Il ne s'agira plus, pour résoudre complétement le problème proposé, que de construire la vraie grandeur de la droite $(op, o'p')$. Pour plus de clarté dans l'épure, on a omis cette dernière construction.

70. *Cas particuliers.* 1° La droite donnée est parallèle à l'un des plans de projection, au plan horizontal, par exemple.

Lorsque deux droites sont perpendiculaires entre elles, leurs projections, faites sur un plan parallèle à l'une de ces droites, sont perpendiculaires entre elles. Conséquemment, la perpendiculaire abaissée du point donné (o, o') sur la droite donnée (ab, $a'b'$), aura pour projection horizontale la droite op, menée par le point o, perpendiculairement à ab. D'ailleurs, le point projeté en p a pour projection verticale p'; donc $o'p'$ est la projection verticale de la perpendiculaire demandée. Fig. 92.

2° La droite donnée est parallèle à la ligne de terre.

D'après le théorème que nous venons de rappeler, les deux projections de la droite cherchée doivent être perpendiculaires aux deux projections de la droite (ab, $a'b'$). Elles sont donc les segments op, $o'p'$ de la droite indéfinie oo'. Fig. 93.

3° La droite donnée est dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre.

On mène, par le point (o, o'), un plan perpendiculaire à la droite (mn, $m'n'$) (problème XVIII, cas 3°) : le point P, projeté en p, p', où cette droite perce le plan, est le pied de la perpendiculaire cherchée. Fig. 89.

Cette perpendiculaire a donc pour projections op, $o'p'$.

4° La droite donnée est perpendiculaire à la ligne de terre.

Ce cas rentre dans le précédent. (Voyez problème XVIII, cas 4°.)

PROBLÈME XX.

Par une droite donnée, faire passer un plan perpendiculaire à un plan donné.

71. Si, d'un point quelconque de la droite donnée, on mène une perpendiculaire au plan donné, cette perpendiculaire et la droite donnée seront dans le plan cherché. La question est donc ramenée au problème XI.

PROBLÈME XXI.

Par un point donné, mener un plan perpendiculaire à deux plans donnés.

72. Pour résoudre ce problème, il faut d'abord chercher l'intersection des deux plans donnés, puis mener, par le point donné, un plan perpendiculaire à cette intersection. Ce plan sera le plan demandé.

PROBLÈME XXII.

Construire la plus courte distance entre deux droites données, non situées dans un même plan.

73. On sait que, pour déterminer la plus courte distance entre deux droites AB, CD, non situées dans un même plan, il faut : 1° mener par AB un plan parallèle à CD; 2° abaisser d'un point quelconque C de CD une perpendiculaire CP sur ce plan; 3° mener, par le pied P de cette perpendiculaire, une parallèle PQ à CD; 4° par le point Q, où cette parallèle rencontre AB, mener une droite QS, parallèle à CP. Cette ligne QS, qui rencontre CD en un point S, est la plus courte distance demandée. Appliquons

la méthode des projections à la solution que nous venons de rappeler.

Soient ab, $a'b'$ les projections de la droite AB, et cd, $c'd'$ celles de la droite CD. Afin de faire passer par AB un plan parallèle à CD, prenons sur AB un point (o, o') quelconque, et, par ce point, menons (oh, $o'h'$) parallèle à CD. Les traces h, k' de cette parallèle, et les traces a, b' de la droite AB, déterminent les traces $ah\alpha$, $k'b'\alpha$ du plan cherché. Nous devons maintenant, d'un point quelconque de CD, abaisser une perpendiculaire sur ce plan; mais, afin de simplifier les constructions, menons cette droite par le point (c, c'), où CD perce le plan horizontal. Elle a pour projections les droites cp, $c'p'$, respectivement perpendiculaires aux traces $a\alpha$, $k'\alpha$ du plan $a\alpha k'$; et elle perce ce plan au point P, projeté en p, p'. Actuellement, menons par ce point une parallèle (pq, $p'q'$) à la droite CD, et construisons le point (q, q'), où cette parallèle rencontre la ligne AB. Enfin, tirons qs parallèle à pc, et $q's'$ parallèle à $p'c'$: les droites qs, $q's'$ seront les projections de la plus courte distance demandée, laquelle aura pour vraie grandeur, $s'r'$. Fig. 137.

Quand les constructions ont été faites avec exactitude, les droites pp', qq' et ss' sont perpendiculaires à xy.

74. *Remarque.* On peut observer que la recherche de la plus courte distance entre deux droites AB, CD, ou de la *commune perpendiculaire* à ces deux droites, peut être réduite à ces deux parties principales : 1° Mener un plan P, parallèle à AB et à CD; 2° mener une droite perpendiculaire à P, et qui rencontre AB et CD.

Cette considération sert à simplifier la construction, dans quelques cas particuliers, comme on va le voir.

75. *Cas particuliers.* 1° Les deux droites sont horizontales.

Fig. 133. Soient ab, cd, les projections horizontales des deux droites, et soient $a'b'$, $c'd'$ leurs projections verticales, lesquelles sont parallèles à la ligne de terre. Puisque les droites AB, CD, sont parallèles au plan horizontal de projection, la plus courte distance sera, d'après la remarque précédente, une droite verticale. Il ne s'agit plus que de mener une verticale qui rencontre les deux droites données. Il est évident que cette droite a pour projection horizontale le point e, où se coupent les projections horizontales des droites données, et qu'elle a sa projection verticale perpendiculaire à la ligne de terre. Donc la plus courte distance cherchée est la droite projetée en e et $e'e''$. De plus, $e'e''$ est sa vraie grandeur.

2° L'une des droites est verticale; l'autre est quelconque.

Fig. 134. La droite AB étant verticale, le plan P sera vertical, et il aura sa trace horizontale parallèle à cd. Par suite, la plus courte distance cherchée aura sa projection horizontale perpendiculaire à cd, et sa projection verticale parallèle à la ligne de terre. Si donc du point a, projection horizontale de AB, nous abaissons ap perpendiculaire sur cd, cette perpendiculaire sera la projection horizontale de la droite cherchée. Cette droite rencontre CD en un point projeté horizontalement en p, et dont la projection verticale doit se trouver en p' sur $c'd'$. Si donc, par ce point p', on mène $p'q'$ parallèle à la ligne de terre, cette parallèle, terminée en q' à sa rencontre avec $a'b'$, sera la projection verticale de la plus courte distance, laquelle a pour longueur ap.

3° L'une des droites est quelconque; l'autre est la ligne de terre.

Ce cas particulier se ramène à celui qui précède, au moyen d'un plan de *profil mom'*, perpendiculaire à *xy*. En effet, sur ce nouveau plan de projection, la droite (*ab*, *a'b'*) est projetée en *mm''*, et la plus courte distance a pour projection *o*P, perpendiculaire à *mm''*. Il ne reste plus qu'à revenir du rabattement aux positions primitives, et l'on trouve *qs*, *q's* pour projections de la plus courte distance, laquelle est égale à *o*P. Fig. 138.

CHAPITRE IV.

Angles formés par des droites et des plans.

PROBLÈME XXIII.

Trouver les angles que fait une droite avec les plans de projection.

76. L'inclinaison d'une droite et d'un plan est mesurée par l'angle que fait la droite avec sa projection sur le plan; par conséquent, pour connaître l'angle que forme la droite
Fig. 94. donnée (ab, $a'b'$) avec le plan horizontal, il faut déterminer celui qu'elle fait avec sa projection horizontale ab. A cet effet, on cherche les traces a et b' de la droite donnée, puis on fait tourner le triangle abb' autour de ab, pour le rabattre sur le plan horizontal. De cette manière, la droite qui joint dans l'espace les points a et b' se rabat en ap; et, par suite, l'angle cherché est bap.

On peut aussi l'obtenir en faisant tourner le triangle rectangle abb' autour de bb' pour le rabattre sur le plan vertical. On obtient ainsi $p'b'$ pour rabattement de la droite (ab, ab'), et $bp'b'$ pour l'angle cherché.

L'inclinaison de la droite et du plan vertical se construit de même, soit par un rabattement sur le plan vertical, soit par un rabattement sur le plan horizontal. La première construction donne, pour l'angle cherché, $a'b'q'$; l'autre donne aqa'.

77. *Cas particuliers.* 1° La droite donnée est parallèle à

l'un des plans de projection, au plan horizontal, par exemple.

La droite (ab, $a'b'$), étant horizontale, fait, avec le plan horizontal de projection, un angle nul; et elle fait, avec le plan vertical, un angle projeté, en vraie grandeur, suivant bay. Fig. 95.

2° La droite donnée rencontre la ligne de terre xy.

Supposons que la droite donnée rencontre la ligne de terre au point α, et soient $a\alpha$, $\alpha a'$ ses deux projections. Pour avoir les angles qu'elle fait avec les plans de projection, prenons, sur cette droite, un point quelconque M, projeté en m, m', et considérons les deux triangles rectangles αMm, $\alpha Mm'$. L'angle $M\alpha m$ du premier mesure l'inclinaison de la droite αM sur le plan horizontal, tandis que l'angle $M\alpha m'$ est celui que fait cette droite avec le plan vertical. Dans chacun des deux triangles, on connaît les deux côtés de l'angle droit, savoir : αm et $mM = m'm''$ pour le premier, $\alpha m'$ et $m'M = mm''$ pour le second. Par conséquent, si on rabat le triangle αMm en $h\alpha m$ sur le plan horizontal, en le faisant tourner autour de $\alpha m'$, et si on rabat également le triangle $\alpha Mm'$ en $v'\alpha m'$ sur le plan vertical, en le faisant tourner autour de $\alpha m'$, on obtiendra les deux angles demandés $h\alpha m$ et $v'\alpha m'$. Fig. 96.

3° La droite donnée est située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre.

Soient (m, m') et (n, n') deux points de la droite donnée, que l'on suppose située dans le plan $m\alpha m'$ perpendiculaire à xy. On cherche les traces h, v' de cette droite, et l'on reconnaît facilement que les angles qu'elle forme avec les plans de projection sont les deux angles aigus du triangle rectangle $h\alpha v'$, dont les deux côtés de l'angle droit sont αh, Fig. 97.

$\alpha v'$. On fait tourner ce triangle autour de $h\alpha$ pour le rabattre en $h\alpha v'$ sur le plan horizontal, et on obtient ainsi, pour les angles demandés, $vh\alpha$ et $hv\alpha$.

PROBLÈME XXIV.

Construire les angles que forme un plan avec les plans de projection.

Fig. 98. 78. Soit $a\alpha a'$ le plan donné. Pour construire l'angle qu'il forme avec le plan horizontal, on prend un point quelconque m de sa trace horizontale αa, et, en ce point, on mène un plan $m\beta m'$ perpendiculaire à αa : ce plan coupe le plan donné et le plan horizontal suivant deux droites qui font entre elles l'angle cherché.

Le plan $m\beta m'$, mené perpendiculairement à $a\alpha$, est vertical; donc sa trace verticale $\beta m'$ est perpendiculaire à xy. Sa trace horizontale βm est perpendiculaire à $a\alpha$; et comme ce plan coupe le plan donné suivant la droite qui joint dans l'espace les points m et m', il s'ensuit que l'angle formé par cette droite avec βm mesure l'inclinaison du plan donné sur le plan horizontal.

Nous retombons donc sur le problème précédent; et nous trouvons, pour l'angle cherché, soit βmn, soit $\beta sm'$.

Pour construire l'angle formé par le plan donné avec le plan vertical, on procède de la même manière. On mène un plan $m'\delta a$ perpendiculaire à $\alpha a'$. Ce plan coupe le plan donné suivant la droite qui, dans l'espace, unit les points a et m'. Par conséquent, l'angle que fait cette dernière droite avec $m'\delta$ est l'angle demandé. Cet angle est rabattu sur le plan horizontal en $av\delta$, et sur le plan vertical en $s'm'\delta$.

79. *Cas particuliers.* 1° Le plan donné est parallèle à la ligne de terre

Soient pq, $p'q'$ les deux traces du plan donné. Si, en un point quelconque α de la ligne de terre, on mène un plan $m\alpha m'$ perpendiculaire à cette ligne, ce plan coupe les deux plans de projection et le plan donné suivant les trois côtés d'un triangle rectangle dans lequel les deux angles aigus sont précisément les angles que fait le plan donné avec les deux plans de projection. Si donc on rabat ce triangle en $m\alpha c$ sur le plan horizontal, on obtient αmc et αcm pour les deux angles cherchés. Fig. 99.

2° Le plan donné a ses deux traces en ligne droite.

Supposons que $a\alpha a'$ soit le plan donné, et qu'on veuille déterminer l'angle formé par ce plan avec le plan horizontal. En employant, comme dans le cas général, un plan quelconque $m\beta m'$ perpendiculaire à $a\alpha$, on obtient l'angle βmh, qui mesure l'inclinaison cherchée. Fig. 100.

Remarque. Si on voulait déterminer l'inclinaison du plan donné sur le plan vertical, on trouverait encore, évidemment, l'angle βmh. C'est-à-dire que le plan donné est également incliné sur les deux plans de projection. C'est ce qu'il est facile de reconnaître *à priori*.

3° Le plan donné passe par la ligne de terre et par un point donné (m, m'). Fig. 101.

Ce cas rentre dans celui que nous avons considéré ci-dessus (1°).

PROBLÈME XXV.

Construire l'angle formé dans l'espace par les traces d'un plan donné.

80. Soit $a\alpha a'$ le plan donné. Pour trouver l'angle de ses deux traces, prenons un point quelconque m' sur la trace verticale; de ce point, abaissons $m'\beta$ perpendiculaire Fig. 98.

à xy; et du point β, abaissons βm perpendiculaire sur la trace horizontale $a\alpha$. Cela fait, supposons que l'on joigne, dans l'espace, le point m' au point m; nous obtiendrons ainsi une droite $m'm$ perpendiculaire à $a\alpha$. Par conséquent, si nous faisons tourner le plan donné $a\alpha a'$ autour de sa trace $a\alpha$, pour le rabattre sur le plan horizontal, cette droite viendra se diriger suivant mk, perpendiculaire à $a\alpha$. Sa longueur est facile à déterminer, car elle est l'hypoténuse d'un triangle rectangle $m\beta n$, dans lequel les deux côtés de l'angle droit sont respectivement égaux à $m\beta$ et $m'\beta$; donc le point m' va se placer à l'intersection k de la droite βm et de la circonférence décrite du point m comme centre avec mn pour rayon. Par suite, la trace $\alpha m'$ coïncide avec la droite αk menée par les points α et k, et l'angle des deux traces est $k\alpha m$.

Il existe une vérification. En effet, dans le mouvement que l'on a imprimé au plan $m\alpha m'$, la distance αm ne change pas; si donc on décrit, du point α comme centre, avec $\alpha m'$ pour rayon, une circonférence, elle doit passer par le point k, déjà déterminé.

81. *Cas particulier*. Le plan donné a ses deux traces en ligne droite.

En appliquant à ce cas particulier la méthode qui vient d'être indiquée en dernier lieu, c'est-à-dire en construisant un triangle $c\alpha m'$ dont les côtés sont $\alpha m'$, $\alpha c = \alpha m$, et $m'c$ égal à la droite qui va du point m au point m', on obtient $c\alpha m'$ pour l'angle cherché.

Fig. 102.

PROBLÈME XXVI.

Construire l'angle de deux droites dont on connaît les projections.

82. Si les droites ne se coupent pas, et que, par un point pris à volonté, on leur mène des parallèles, l'angle formé par ces parallèles mesurera l'angle des droites données.

Soient, pour fixer les idées, o, o' les projections d'un point quelconque, ab, $a'b'$ les projections de la parallèle à la première droite, et dc, $d'c'$ les projections de la parallèle à la seconde droite. On détermine les traces horizontales a et c de ces parallèles, et on mène la droite ac. On peut considérer cette droite comme la base d'un triangle dont le sommet O est projeté en o et o', et dans lequel l'angle aOc, opposé à la base ac, est l'angle demandé. Pour construire le triangle, il ne reste plus qu'à chercher les vraies longueurs des deux côtés adjacents à l'angle O. Les projections horizontales de ces côtés sont ao et oc, et leurs projections verticales sont $a'o'$ et $o'c'$. Si donc l'on prend $o''h=ao$ et $o''k=oc$, l'hypoténuse $o'h$ sera la longueur du côté projeté en ao, et l'hypoténuse $o'k$ sera la longueur du côté projeté en oc. Par suite, en décrivant des points a et c comme centres, avec $o'h$ et $o'k$ pour rayons, des arcs de cercle qui se coupent en m, puis menant ma et mc, on obtiendra l'angle demandé amc. Fig. 103.

83. On peut construire le triangle aOc par une autre méthode. En effet, la base ac étant connue, il suffit de déterminer la position et la grandeur de la hauteur. Pour cela, on abaisse op perpendiculaire sur ac, et on conçoit qu'on joigne le point p au sommet O. En vertu d'un théorème connu (70), la droite Op sera perpendiculaire à ac,

de sorte que si on fait tourner le triangle *aOc* autour de sa base *ac* pour le rabattre sur le plan horizontal, cette perpendiculaire ira se placer dans la direction de *po*. Il ne reste donc plus qu'à trouver la vraie longueur de cette perpendiculaire. Or, nous savons qu'elle est l'hypoténuse du triangle rectangle *Oop*, dont les côtés sont égaux à *op* et *o'o''*. Par conséquent, on prend sur *xy* une distance *o''q* égale à *op* ; on tire *o'q*, et on porte cette distance de *p* en *m*.

84. *Remarque* 1. Au point de vue pratique, cette seconde méthode est évidemment plus exacte que l'autre.

Remarque 2. Le triangle *amc* peut être considéré comme étant le rabattement du triangle *aOc*, que l'on au rait fait tourner autour de sa *trace horizontale ac*. Le problème que nous venons de traiter rentre donc dans la classe de ceux auxquels on peut appliquer avec avantage la *méthode des rabattements*, méthode dont nous avons fait déjà un fréquent usage.

85. *Cas particuliers*. 1° La première des deux droites est parallèle à l'un des plans de projection, au plan horizontal, par exemple; la seconde est quelconque.

Fig. 104. Soient *ab*, *a'b'* les projections de la première droite, et *cd*, *c'd'* les projections de la seconde. Le plan des deux droites a évidemment pour trace horizontale une parallèle *ch* à la projection horizontale *ab* de la première droite. Rabattons ce plan sur le plan horizontal; le point (*o*, *o'*) viendra se placer en un point *m*, que l'on construira facilement d'après ce qui précède; et la droite (*oa*, *o'a'*) viendra en *ms*, parallèlement à *ch*. L'angle demandé sera donc *cms*.

2° Les deux droites données sont parallèles à un même plan de projection, au plan horizontal par exemple.

Il est évident que, dans ce cas, l'angle formé par les projections horizontales est égal à l'angle des deux droites données.

3° La première des deux droites est parallèle au plan horizontal, et la seconde est parallèle au plan vertical de projection.

Ce cas rentre dans celui que nous avons examiné tout à l'heure (1°).

4° La première des deux droites données est perpendiculaire à l'un des plans de projection, au plan horizontal, par exemple; la seconde droite est quelconque.

Soient a, $a'b'$ les deux projections de la première droite, et cd, $c'd'$ les deux projections de la seconde droite. On voit facilement que l'angle demandé est le complément de celui que fait, avec le plan horizontal, la droite (cd, $c'd'$). Si donc on fait tourner cette droite autour de la première jusqu'à ce que leur plan soit devenu parallèle au plan vertical de projection, le triangle caO de l'espace se projette en vraie grandeur suivant $o'a'h'$, et on obtient $a'o'h'$ pour l'angle des deux droites données. Fig. 106.

5° La première des deux droites données est parallèle à la ligne de terre, la seconde droite est quelconque.

La construction, qui rentre encore dans celle du cas (1°), est indiquée dans la figure 107.

6° Les deux droites données sont dans un même plan perpendiculaire à la ligne de terre.

Soit mam' le plan perpendiculaire à xy et renfermant les deux droites données; soient (o, o') le point de concours de ces deux droites, (m, m') un second point de Fig. 108.

l'une, et (n, n') un second point de l'autre. On fait tourner le plan mon' autour de sa trace horizontale mo, afin de le rabattre sur le plan horizontal, et on obtient par ce moyen les rabattements OM, ON des deux droites données. Par conséquent, MON est l'angle cherché.

7° Les deux droites données ont même projection horizontale.

Fig. 109. Soit ab la projection horizontale commune aux deux droites données, et soient $a'b'$, $c'd'$ les projections verticales de ces lignes, lesquelles ont pour traces horizontales les points a et c. Rabattons encore le plan des deux droites autour de sa trace horizontale ac; nous obtiendrons, comme ci-dessus, le rabattement m du point de concours des deux droites; en sorte que ema est l'angle demandé.

8° La première des deux droites données est la ligne de terre, la seconde est une droite quelconque qui rencontre la ligne de terre.

Fig. 110. Supposons que a soit le point où la droite (ab, ab') rencontre la ligne de terre, et qu'on veuille avoir l'angle de ces deux droites. Il suffit, pour résoudre cette question, de supposer que la droite (ab, $a'b'$) tourne autour de xy, jusqu'à ce qu'elle soit venue se rabattre sur le plan horizontal. Pour déterminer son rabattement pa, lequel passe évidemment par le point a, on cherche le rabattement p d'un point quelconque (m, m') pris sur cette même droite. On obtient ainsi l'angle demandé pam''.

PROBLÈME XXVII.

Construire la bissectrice de l'angle formé par deux droites données.

86. Soient (ab, $a'b'$) et (cd, $c'd'$) les deux droites données, lesquelles se coupent en un point (o, o'). Construisons d'abord l'angle amc, formé par ces droites, et menons la bissectrice mh de cet angle. Cela posé, faisons tourner le triangle amc autour de ac pour le remettre dans sa position primitive; il est clair que le point h, où la bissectrice perce le plan horizontal, ne change pas de position; donc ses deux projections h et h' appartiennent aux projections de la bissectrice. D'ailleurs, les deux projections de cette droite doivent passer aussi par les projections o et o' du sommet de l'angle; elles sont donc oh et $o'h'$. Fig. 111.

PROBLÈME XXVIII.

Construire l'angle d'une droite et d'un plan donnés.

87. D'après la définition rappelée ci-dessus (76), il faudrait, pour construire l'angle d'une droite et d'un plan donnés, commencer par projeter la droite sur ce plan; après quoi l'on construirait l'angle formé par cette projection et la droite donnée. On simplifie la solution en observant que cet angle est le complément de celui que fait la droite avec la perpendiculaire abaissée d'un quelconque de ses points sur le plan. Le problème qui nous occupe est donc ramené à la recherche de l'angle formé par deux droites.

Soient ab, $a'b'$ les projections de la droite donnée. Prenons, sur cette droite, un point quelconque (o, o'), et de Fig. 112.

ce point, abaissons une perpendiculaire sur le plan. Cette perpendiculaire a pour projections les droites *op*, *o'p'*, respectivement perpendiculaires aux traces *αd*, *αd'* du plan donné (28). Si nous construisons l'angle *amk*, formé par la perpendiculaire et par la droite donnée, et si nous menons *mv* perpendiculaire à *ma*, l'angle *kmv* sera l'angle demandé.

88. *Cas particuliers.* 1° La droite donnée est quelconque; le plan donné est parallèle à la ligne de terre.

Fig. 113. Soient *cd*, *c'd'* les deux projections de la droite donnée, et *ab*, *a'b'* les traces du plan donné parallèle à *xy*. D'un point quelconque (*o*,*o'*) de la droite donnée, on abaisse une perpendiculaire sur le plan donné, laquelle a pour projections les lignes *ov*, *o'v'* perpendiculaires à *xy*, et elle est située dans le plan *vαv'* perpendiculaire à *xy*. Afin d'avoir sa trace horizontale, on fait tourner le plan *vαv'* autour de *vα* pour le rabattre sur le plan horizontal. On obtient ainsi le rabattement O du point (*o*, *o'*) et le rabattement *iv* de l'intersection du plan *vαv'* avec le plan donné. Du point O on mène O*p* perpendiculaire sur *iv*; et le point *h*, où O*p* rencontre la trace horizontale *vα*, est la trace horizontale cherchée. La trace horizontale de la droite donnée est *c*; il est donc facile de déterminer l'angle *cmh* que font entre elles ces deux droites. Cet angle étant le complément de l'angle cherché *cmf*, on obtiendra celui-ci en menant la droite *mf* perpendiculaire à *mh*.

2° La droite donnée est quelconque, et le plan donné est parallèle à l'un des plans de projection, au plan horizontal par exemple.

L'angle cherché est évidemment égal à celui que forme

la droite donnée avec le plan horizontal de projection. La question est donc ramenée au problème XXII.

3° La droite donnée est quelconque ; le plan donné passe par la ligne de terre et par un point donné.

Soit proposé de construire l'angle formé par la droite (ab', $a'b'$) avec le plan qui passe par xy, et par le point donné (m, m'). La construction, qui rentre dans celle du cas (1°), fournit ank pour l'angle cherché. Fig. 114.

4° La droite donnée est parallèle à la ligne de terre, et le plan donné est quelconque.

On sait que deux droites parallèles sont également inclinées sur un même plan quelconque. Il résulte de ce théorème que l'angle formé par la droite donnée et le plan donné est égal à celui que fait la ligne de terre avec ce dernier plan.

Le cas particulier dont il s'agit ici est donc ramené au problème suivant.

89. *Construire l'angle que fait la ligne de terre avec un plan donné.*

A cet effet, on prend sur la ligne de terre un point o quelconque, par lequel on abaisse oh et oh', perpendiculaires aux traces du plan donné, $a\alpha a'$. Ces droites sont les deux projections de la perpendiculaire menée du point sur le plan. On détermine ensuite l'angle sok que cette droite fait avec la ligne de terre ; le complément sov de cet angle est celui que fait la ligne de terre avec le plan donné. Fig. 115.

PROBLÈME XXIX.

Construire l'angle de deux plans donnés.

Fig. 116. 90. Soient $a\alpha a'$ et $b\beta b'$ les deux plans donnés. Concevons qu'en un point quelconque O de leur intersection on mène un plan P perpendiculaire à cette intersection ; ce plan coupera les deux plans donnés suivant deux droites partant du point O, et faisant entre elles l'angle demandé. Or, lorsqu'un plan est perpendiculaire à une droite, ses traces sont respectivement perpendiculaires aux projections de la droite ; donc la trace horizontale du plan P sera perpendiculaire à la projection horizontale mn de l'intersection des deux plans donnés. Si donc on mène une droite quelconque pq perpendiculaire à mn, on pourra la regarder comme étant la trace horizontale du plan P ; et les intersections de ce plan P avec les deux plans donnés, c'est-à-dire, les côtés de l'angle cherché, seront deux droites qui partiront des points p et q, et qui iront se couper au point O. L'angle cherché est donc l'angle au sommet du triangle pOq, dans lequel pq est la base. Il suffit, pour construire ce triangle, de déterminer sa hauteur et le pied de celle-ci.

Or, le point O, appartenant à l'intersection des deux plans donnés, doit se projeter sur le plan horizontal en un point inconnu, mais situé sur la projection horizontale de cette intersection. Donc la hauteur du triangle pOq est projetée suivant mn; et le point s est le pied de cette hauteur. D'ailleurs cette droite est contenue dans le plan P, perpendiculaire à l'intersection des deux plans donnés ; d'où il résulte qu'elle est perpendiculaire à cette intersection. Pour avoir sa véritable grandeur, on fait tourner

le plan $m'mn$ autour de sa trace verticale $m'm$, jusqu'à ce qu'il vienne s'appliquer sur le plan vertical de projection · les points n et s viennent se rabattre en h et r; l'intersection des deux plans donnés, qui joint les points m' et n, se rabat suivant $m'h$; et, par suite, on obtient la vraie longueur, rk, de la hauteur sO du triangle pOq, en menant du point r la perpendiculaire rk à $m'h$.

Il ne reste plus, pour terminer la construction, qu'à opérer comme dans le problème XXVI; et pvq sera l'angle des deux plans donnés.

91. *Remarque* 1. Les distances rh et sn sont égales, et il en est de même des distances rk et sv; or, rk, perpendiculaire à $m'h$, est plus petite que l'oblique rh; donc sv est plus petite que sn; par conséquent, dans la construction qu'on vient d'indiquer, le sommet de l'angle cherché doit toujours se trouver entre les points s et n.

Remarque 2. On peut ramener la recherche de l'angle de deux plans à la recherche de l'angle de deux droites; car, si d'un point quelconque pris dans l'angle des plans on abaisse des perpendiculaires sur ces plans, l'angle de ces perpendiculaires sera le supplément de l'angle des plans.

92. *Cas particuliers.* 1° Les deux plans donnés ont leurs traces horizontales parallèles, ou leurs traces verticales parallèles.

Soient $a\alpha a'$ et $b\beta b'$ les deux plans donnés. On cherche d'abord leur intersection, laquelle est une horizontale dont les projections sont mn parallèle à $a\alpha$, et $m'n'$ parallèle à xy. On mène ensuite un plan perpendiculaire à cette intersection; ce plan, qui est vertical, a sa trace horizontale Fig. 117.

vqs perpendiculaire à la projection horizontale *mn* de l'intersection.

L'angle des deux plans donnés est, comme dans le cas général, mesuré par l'angle au sommet d'un triangle dont *pq* est la base, dans lequel le point *s* est le pied de la hauteur, et dont la hauteur, comme on le voit aisément, est égale à *mm'*. Par conséquent, si, à partir du point *s*, on prend sur *sn* une distance $sv = mm'$, et que l'on trace *vp* et *vq*, on obtiendra l'angle cherché *pvq*.

2° Les deux plans donnés sont perpendiculaires sur un
Fig. 118. même plan de projection, sur le plan horizontal, par exemple.

Il est clair que l'inclinaison des deux plans est mesurée par l'angle $\alpha m \beta$, que forment leurs traces horizontales. Il n'y a donc aucune construction à effectuer.

3° Le premier des deux plans donnés est perpendiculaire à la ligne de terre ; le second est quelconque.

Fig. 119. Soient $b\beta b'$ et $a\alpha a'$ les deux plans donnés. Leur intersection a pour projections les traces $b\beta$ et $b'\beta$ du premier plan ; de sorte que si, par un point O de cette intersection, on mène un plan qui lui soit perpendiculaire, ce plan aura pour trace horizontale une droite *pq* parallèle à *xy* ; et il coupera les deux plans donnés suivant les droites *p*O et *q*O, qui feront entre elles l'angle cherché. Il est à remarquer ici que le triangle *p*O*q*, qui donne cet angle, est rectangle en *q* ; de façon que la construction générale est un peu simplifiée.

4° Le premier plan est horizontal ; le second est quelconque.

Lorsque deux plans parallèles sont coupés par un troisième plan, les angles correspondants sont égaux ; donc,

l'angle que forment entre eux les deux plans donnés est égal à celui que fait le second de ces plans avec le plan horizontal de projection. La question est donc ramenée à la recherche de l'angle que fait, avec le plan horizontal, un plan donné (problème XXIII).

5° Le premier plan est parallèle à la ligne de terre ; le second est quelconque.

La construction générale est applicable ; aussi nous renvoyons le lecteur à la figure 120, dans laquelle les traces du premier plan sont ac, $a'c'$, celles du second sont $b\beta$, $b'\beta$, et l'angle cherché est pvq.

6° Le premier plan est parallèle à l'un des plans de projection, au plan horizontal, par exemple ; le second est parallèle à la ligne de terre.

Ce cas particulier se résout facilement au moyen d'un rabattement. Il en est de même du suivant. Les constructions sont effectuées dans les figures 121 et 122.

7° Les deux plans donnés sont parallèles à la ligne de terre.

8° Les deux plans donnés ont même trace horizontale.

Soient $a\alpha$ la trace horizontale commune, et $\alpha a'$, $\alpha b'$ les traces verticales des deux plans donnés. La construction générale se simplifie ; car l'intersection de ces plans est $a\alpha$; et tout plan $o\beta m$, mené perpendiculairement à cette trace, coupe les deux plans suivant deux droites qui comprennent entre elles l'angle cherché. Ces droites, qui ont pour traces verticales les points m, n, peuvent être regardées comme les deux derniers côtés d'un triangle omn, dans lequel mn est la base, o le sommet opposé, et $o\beta$ la hauteur. Si l'on fait tourner le plan $o\beta m$ autour de $o\beta$, ce triangle se rabat Fig. 123.

suivant poq, et par conséquent l'angle poq est celui qu'il s'agissait de construire.

9° Les deux plans donnés rencontrent la ligne de terre au même point.

Fig. 124. On détermine d'abord les projections de l'intersection des deux plans donnés $a\alpha a'$, $b\alpha b'$; soient αp et $\alpha p'$ ces deux projections. On mène ensuite, par un point quelconque O de l'intersection des deux plans, un plan $\beta\gamma\delta$ perpendiculaire à cette intersection. Ce plan coupe le plan horizontal et les deux plans donnés, suivant un triangle qui a pour base mn, pour sommet le point (o, o'), et dans lequel l'angle opposé à mn est celui que l'on cherche. On sait que la droite qui unit dans l'espace le point s au point (o, o') est la hauteur de ce triangle, et que le point s est le pied de cette hauteur; par conséquent il suffit, pour construire le triangle, de déterminer la vraie grandeur de cette hauteur. Or, elle est l'hypoténuse d'un triangle rectangle, qui a pour côtés de l'angle droit os et $o''o'$. On construit facilement ce triangle sok, à l'aide d'un rabattement; et, en portant sk de s en v sur op, menant mv et nv, on a l'angle demandé mvn.

11° Les deux plans donnés sont tels que chacun d'eux a ses traces horizontale et verticale en ligne droite.

Fig. 125. Il n'y a rien de changé à la méthode générale; et, en l'appliquant, on trouve, pour angle des deux plans $a\alpha a'$, $b\beta b'$, l'angle pvq.

Remarque. Le triangle $m'm''h$ est rectangle isoscèle; donc il en est de même pour le triangle $m'sk$; d'où il résulte que $sv=sk=\frac{sm'}{\sqrt{2}}$.

12° Chacun des plans a ses deux traces en ligne droite; et ces droites se coupent sur la ligne de terre.

Soient $a\alpha a'$ et $b\alpha b'$ les deux plans donnés. On a vu que l'intersection de ces deux plans est une droite perpendiculaire à la ligne de terre, inclinée à 45° sur les deux plans de projection, et qui a pour projections la droite $m'\alpha m$ perpendiculaire à xy. En un point quelconque O de cette intersection, menons un plan qui lui soit perpendiculaire; ce plan coupe le plan horizontal et les deux plans donnés suivant un triangle pOq, dont la base pq est parallèle à la ligne de terre, et dont la hauteur, d'après la remarque précédente, est égale à $\frac{s\alpha}{\sqrt{2}}$. De plus, le point s est le pied de cette hauteur. Fig. 126.

Si donc nous menons la bissectrice αr de l'angle droit $m\alpha y$, et que nous abaissions sk perpendiculaire à αr, la construction s'achèvera comme dans le cas précédent.

13° L'un des deux plans donnés est quelconque; l'autre passe par la ligne de terre et par un point donné.

Supposons qu'il s'agisse de construire l'angle que fait le plan $a\alpha a'$ avec celui qui passe par xy et par le point (m, m'). On détermine d'abord l'intersection $(\alpha n, \alpha n')$ des deux plans donnés. On peut ensuite, pour construire leur angle, employer la méthode générale, ou recourir à la méthode particulière indiquée dans le cas (10°). Dans l'épure, on a fait usage du premier procédé. Fig. 127.

14° L'un des deux plans donnés est parallèle à la ligne de terre; l'autre passe par la ligne de terre et par un point donné.

Pour avoir l'angle que fait le plan $(ab, a'b')$, parallèle à xy, avec celui qui passe par xy et par le point Fig. 128.

(m, m'), on observe que l'intersection de ces deux plans est une parallèle à la ligne de terre. Par conséquent, si on les coupe par un même plan $m\alpha m'$ perpendiculaire à xy et passant par le point (m, m'), les deux intersections formeront entre elles l'angle cherché. Ces lignes, qui joignent dans l'espace les points c, c', et les points α, M, sont rabattues sur le plan horizontal en $c''c$ et αM. Donc l'angle demandé est αoc.

15° L'un des deux plans donnés est horizontal; l'autre passe par la ligne de terre et par un point donné.

Fig. 129 L'intersection des deux plans $p'q'$ et (xy, m, m'), étant parallèle à xy, il s'ensuit que le plan $m\alpha m'$, perpendiculaire à xy, et mené par le point (m, m'), les coupe suivant deux droites formant entre elles l'angle cherché. Ces droites sont rabattues sur le plan horizontal en $c''c$ et αM; et $\alpha oc''$ est l'angle des deux plans.

16° L'un des deux plans donnés a ses deux traces en ligne droite; l'autre passe par la ligne de terre et par un point donné.

Fig. 130. Après avoir déterminé l'intersection (αf, $\alpha f'$) des deux plans $a\alpha a'$, (xy, M), on achève la construction comme dans le cas général.

17° L'un des plans passe par la ligne de terre et par un point donné, l'autre passe par la ligne de terre et par un second point donné.

Fig. 131. Les deux plans (xy, m, m') et (xy, n, n') ont pour intersection la ligne de terre. Donc les intersections de ces plans avec un même plan perpendiculaire à xy, comprennent entre elles l'angle cherché.

Le plan $m\beta m'$, perpendiculaire à xy et passant par le point (m, m'), coupe le premier des deux plans donnés sui-

vant une droite qui est rabattue sur le plan horizontal en βM, tandis que le plan $n\alpha n'$, perpendiculaire à xy et passant par (n, n'), coupe le second des deux plans donnés suivant une droite qui est rabattue horizontalement suivant αN. Or, les deux plans $n\alpha n'$ et $m\beta m'$ sont parallèles; par conséquent, si par le point α on mène αk parallèle à βM, on pourra regarder cette droite comme le rabattement de l'intersection du plan $n\alpha n'$ avec le premier des deux plans donnés. Donc l'angle demandé est Nαk.

PROBLÈME XXX.

Construire le plan bissecteur de l'angle formé par deux plans donnés.

93. Soient $a\alpha a'$ et $b\beta b'$ les deux plans donnés. On construit, d'après le problème précédent, l'angle pvq que ces deux plans font entre eux; puis on le divise en deux parties égales par la droite vd qui rencontre pq au point d; on suppose ensuite qu'on fasse tourner le plan de cet angle autour de pq, afin de lui rendre sa véritable position; et il est clair que la ligne vd viendra se placer dans le plan bissecteur. Or, dans le mouvement qu'on imprime au plan de l'angle pvq, la droite vd ne cesse pas de passer au point d; donc ce point d appartient à la trace horizontale du plan cherché. D'ailleurs, ce plan doit passer par l'intersection des deux plans donnés; donc ses traces passent aussi par les points m, m', où cette intersection rencontre les plans de projection. Elles sont donc $md\delta$ et $\delta m'$ Fig. 132.

CHAPITRE V.

Résolution de l'angle trièdre. — Réduction à l'horizon. — Sphère inscrite. — Sphère circonscrite.

94. Les *éléments* d'un angle trièdre quelconque sont les trois *faces* et les trois *angles dièdres*. Si l'on se donne trois de ces *six* éléments, on pourra se proposer de trouver les trois autres ; c'est là ce qu'on appelle *résoudre un angle trièdre*.

95. Le problème comporte six cas distincts. En effet, représentons par A, B, C les trois angles dièdres du trièdre ; par *a*, *b*, *c*, les faces opposées à ces angles ; et nous aurons six manières, *essentiellement différentes*, de choisir les données, savoir :

1°	*a*, *b*, *c* ;	4°	A, B, C ;
2°	*b*, *c*, A ;	5°	B, C, *a* ;
3°	*b*, *c*, B ;	6°	A, B, *c*.

96. Par la considération de l'angle *trièdre supplémentaire*, les trois derniers cas peuvent être ramenés aux trois premiers. Car si l'on donne, par exemple, les trois angles dièdres A, B, C ; comme les suppléments de ces angles sont égaux aux faces du trièdre supplémentaire, il ne s'agira plus que de construire un angle trièdre connaissant ses trois faces.

Nous pouvons donc supposer que les données sont : les trois faces ; ou deux faces et l'angle dièdre compris ; ou deux faces et l'angle dièdre opposé à l'une d'elles.

PROBLÈME XXXI.

Connaissant les trois faces d'un angle trièdre, trouver les trois angles dièdres.

97. Supposons qu'on ouvre l'angle trièdre SABC suivant l'arête SC, et qu'on fasse tourner les plans CSA et CSB autour des arêtes SA et SB pour les rabattre sur le plan de la face ASB, supposé horizontal. Comme les angles plans CSA et CSB sont égaux à b et à a, il est clair qu'on obtiendra leurs rabattements en menant, dans le plan horizontal, des droites Sc et Sc' sous les angles connus cSA$=b$ et c'SB$=a$. Fig. 139.

Si on prend sur les lignes Sc, Sc' deux points quelconques m, m', également éloignés du sommet S, on pourra regarder ces deux points comme les rabattements, sur le plan horizontal, d'un même point M de l'arête SC.

Concevons maintenant que les faces cSA et c'SB tournent respectivement autour des arêtes SA et SB pour reprendre leurs positions primitives. Dans ce mouvement de rotation, les points m, m' décrivent des circonférences dont les plans sont respectivement perpendiculaires aux arêtes SA, SB, et dont les centres sont les pieds des perpendiculaires mg, $m'g'$ abaissées des points m,m' sur SA, SB. Il suit de là que le point M a pour projection horizontale le point de concours h des lignes mg, $m'g'$, et que la droite hS sera la projection horizontale de l'arête SC.

Si on joint le point M projeté en h, aux points h,g et g', on formera deux triangles rectangles Mhg, Mhg', dans lesquels les angles Mgh, M$g'h$ mesurent les angles dièdres A et B qu'il s'agit de construire, et dans lesquels

les hypoténuses Mg, Mg' sont respectivement égales à mg, $m'g'$.

Si donc nous supposons que le triangle Mhg tourne autour du côté hg pour se rabattre sur le plan horizontal ASB, le sommet M viendra se placer à l'intersection r de hq perpendiculaire à hg, et de l'arc décrit du point g comme centre avec le rayon gm; de sorte qu'en tirant gr, nous aurons hgr pour vraie grandeur de l'angle dièdre A.

De même, afin de trouver la vraie grandeur de l'angle dièdre B, on mène, dans le plan horizontal, hq' perpendiculaire à hg'; on décrit, du point g' comme centre, avec $g'm'$ pour rayon, l'arc $m'r'$; on joint le point r', où cet arc coupe hq', au point g'; et $hg'r'$ mesure l'angle dièdre B.

Quant au troisième angle dièdre C, qui a pour arête SC; imaginons, par le point M, un plan perpendiculaire à cette arête; ce plan coupera les deux faces latérales SCA et SCB, suivant deux droites perpendiculaires à SC au point M, et qui comprendront entre elles l'angle cherché C.

Pour déterminer les points p, p', où ces droites rencontrent le plan horizontal SBA, observons que les droites Sm, Sm' représentent les rabattements de SM autour de SA et de SB; si donc nous élevons, aux points m, m', les perpendiculaires mp, $m'p'$ aux arêtes Sc, Sc', ces perpendiculaires rencontreront SA, SB aux points demandés p, p'. De plus, ces droites mp, $m'p'$ seront égales, respectivement, à Mp, Mp'.

Il ne reste plus qu'à construire le triangle Mpp', ce qui se fera en décrivant, dans le plan horizontal, des arcs de cercle ayant les points p, p' pour centres, et les droites pm, $p'm'$ pour rayons; ces arcs se couperont au point M', rabattement de M. En tirant pM' et p'M', on obtiendra le

triangle $pM'p'$, rabattement du triangle pMp'. Par conséquent, l'angle $pM'p'$ est égal à l'angle dièdre C.

98. *Remarque.* La construction précédente comporte plusieurs vérifications.

1° Les droites hr, hr' doivent être égales, car chacune d'elles représente la vraie grandeur de la verticale hM.

2° L'arête SM étant perpendiculaire au plan pMp', il s'ensuit que la projection horizontale Sh de cette arête doit être perpendiculaire à la trace horizontale pp' de ce plan.

3° La droite Sh étant perpendiculaire à la base pp' du triangle Mpp', dont le sommet M est projeté en h; si ce triangle tourne autour de sa base pp' pour venir se rabattre sur le plan horizontal, le sommet M se mouvra dans le plan vertical Mhs. Conséquemment, le point M', où s'est rabattu ce sommet, doit se trouver sur la droite Sh.

99. *Discussion.* On peut toujours supposer que la face ASB est la plus grande des trois faces données. Alors, pour que le trièdre soit possible, il faut que les circonférences décrites autour des droites SB, SA, par les points m', m, puissent se rencontrer. La première circonférence est projetée *tout entière* sur son diamètre $m'g'n'$, lequel est la corde de l'arc $m'i'n'$. De même, la seconde circonférence est projetée suivant la corde mn de l'arc min. Ces deux circonférences ne pourront donc se couper que si les cordes mn, $m'n'$ se coupent elles-mêmes. Ceci exige évidemment que la somme des arcs in, $i'n'$ soit plus grande que l'arc ii'; ou ce qui est la même chose, que *la plus grande face soit moindre que la somme des deux autres.* On retombe donc sur la condition connue.

PROBLÈME XXXII.

Connaissant deux faces d'un angle trièdre, et l'angle dièdre compris, trouver la troisième face et les deux autres angles dièdres.

Fig. 140. 100. Soient ASB=c et ASC=b les deux faces données, et soit en même temps A l'angle dièdre donné, compris entre ces faces.

Prenons pour plan horizontal le plan de la face ASB, et supposons que la face ASC tourne autour de l'arête SA pour se rabattre sur le plan horizontal; il est clair que nous obtiendrons le rabattement de cette face en menant une droite Sc qui fasse avec SA l'angle cSA=b. Si la face cSA tourne autour de SA pour reprendre sa position primitive SCA, un point quelconque m de la droite Sc décrira un arc vertical dont le rayon sera mg perpendiculaire à SA et dont le centre sera g; la projection horizontale de cet arc sera sur gh perpendiculaire à SA; et quand le point m sera parvenu en un point M de l'arête SC, la droite Mg, perpendiculaire à SA, fera avec hg l'angle Mgh égal à l'angle dièdre donné A.

Si maintenant le plan Mgh tourne autour de sa trace horizontale hg pour se rabattre sur le plan ASB, le rabattement de la droite Mg sera une droite gr, faisant, avec gh, un angle rgh=A; et comme, dans ce mouvement, la distance Mg reste constante, le point M se rabattra en r, à l'intersection de gr avec l'arc mr, décrit du point g comme centre. En abaissant rh perpendiculaire à gh, nous obtiendrons la projection horizontale h du point M de l'arête SC; et, par suite, la droite Sh sera la projection horizontale de cette arête.

Pour déterminer la troisième face; observons que si elle tourne autour de SB pour se rabattre sur le plan horizontal, le point M restera dans le plan perpendiculaire à SB mené par la verticale M*h*, et que par conséquent il se rabattra sur *hg'm'* perpendiculaire à SB. D'ailleurs la distance SM reste invariable et égale à S*m*; donc le rabattement du point M doit aussi se trouver sur l'arc décrit du point S comme centre, avec S*m* pour rayon. Il résulte de là que le point *m'*, où cet arc coupe *hg'm'*, est le rabattement du point M. Par suite, l'angle *m'*SB sera égal à *a*, c'est-à-dire à la troisième face de l'angle trièdre proposé.

Les trois faces *a*, *b* et *c* de cet angle trièdre étant connues, on trouvera les deux angles dièdres B et C au moyen du problème précédent.

PROBLÈME XXXIII.

Connaissant deux faces d'un angle trièdre, et l'angle dièdre opposé à l'une d'elles, trouver la troisième face et les deux autres angles dièdres.

101. Soient BSA=*c* et CSA=*b* les deux faces données, et soit B l'angle dièdre donné, opposé à la face *b*. Prenons pour plan horizontal le plan de la face BSA; et, par un point *g*, pris à volonté sur l'arête SA, menons un plan perpendiculaire à cette arête. Ce plan coupe le plan horizontal suivant une droite *gp* perpendiculaire à SA, et il coupe l'arête SC, située hors du plan horizontal, en un point M; la section que fait ce plan dans l'angle trièdre est donc un triangle *pMg* qu'il s'agit de construire. Fig. 141.

Remarquons d'abord que le plan vertical *pg* coupe la droite S*c*, rabattement de SC, en un point *m* qui représente la position que vient occuper le point M lorsque la

ace b a tourné autour de SA pour se rabattre sur le plan horizontal. Si donc nous supposons que le triangle Mgp tourne autour de sa base gp pour se rabattre sur le plan horizontal, le sommet M viendra se placer en quelque point de l'arc mn, décrit du point g comme centre, avec mg pour rayon.

D'un autre côté, le point M doit se trouver sur la section faite dans la face inconnue BSC, par le plan vertical pg. Le point p appartient au rabattement de cette section; et il est très-facile d'avoir un second point de ce rabattement.

En effet, si par le point g nous imaginons un plan gq perpendiculaire à SB, ce plan coupera les deux faces BSA et BSC suivant deux droites qg et qO faisant entre elles un angle égal à l'angle dièdre B; et il coupera le plan vertical mgp suivant une droite gO projetée en g. Si donc, après avoir fait l'angle gqO' égal à l'angle dièdre B, nous menons gO' perpendiculaire à qg, la droite gO' sera égale à gO; et en prenant sur l'arête SA, $gO''=gO'$, le point O'' sera le rabattement du point O situé sur l'intersection du plan vertical pg avec la face BSC.

Supposons maintenant que la droite $pO''K'$ rencontre la circonférence mn en M'; ce point M' sera le rabattement du point M, et $pM'g$ sera le rabattement du triangle pMg. Si nous abaissons $M'M_1$ perpendiculaire sur gp, le point M_1 sera la projection horizontale du point M, et SM_1C' sera la projection de l'arête SC.

La construction de l'angle trièdre s'achève sans difficulté.

102. *Discussion.* Quand la droite $pO''K'$ rencontre la demi-circonférence mn en deux points M' et M'', comme cela a lieu sur la figure, le problème a, en général, deux

solutions. La troisième face de l'angle trièdre fournie par le point M′ est c'SB ; celle qui correspond au point M″ est c''SB.

Le problème n'a cependant deux solutions que si les points M′ et M″ sont tous deux à la droite de l'arête SB : lorsque le point M″ est à gauche de SB, c'est-à-dire au-dessous de *pg*, il ne fournit pas de solution, parce qu'alors l'angle dièdre suivant SB, au lieu d'être égal à B, est le *supplément* de B. Quand la demi-circonférence *mn* est tangente à la droite *p*O″K′, les deux solutions se réduisent à une seule. Enfin, lorsque ces lignes ne se rencontrent pas, le problème est impossible.

PROBLÈME XXXIV.

Réduire à l'horizon l'angle de deux droites.

103. Supposons que l'on connaisse l'angle AOB formé par deux droites OA, OB, et que l'on connaisse aussi les inclinaisons de ces deux droites sur la verticale OC passant par leur point de concours O. Si l'on projette les deux droites sur un plan horizontal quelconque, l'angle A′O′B′, formé par leurs projections, sera ce qu'on appelle l'angle AOB, *réduit à l'horizon*. Il est clair que l'angle A′O′B′ mesure l'inclinaison des deux plans verticaux COA, COB : ainsi, la réduction à l'horizon n'est qu'un cas particulier de la résolution d'un angle trièdre. Cependant, à cause de la disposition particulière des données, on le résout directement comme il suit. Fig. 155.

Prenons pour plan vertical de projection, celui de la face AOC ; supposons que la face BOC ait tourné autour de la verticale OC, jusqu'à ce qu'elle soit venue se rabattre sur le

Fig. 135. plan vertical. Soient alors o, o' les deux projections du sommet de l'angle trièdre ; $c'o'a$, la face COA ; $c'o'b'$, le rabattement de l'autre face ; $ao'b''$ un angle égal à l'angle AOB des deux droites.

Il résulte de ces données que le côté OA de l'angle AOB a pour projection horizontale la partie oa de xy ; par conséquent il ne s'agit plus que de trouver la projection horizontale du deuxième côté OB, ou seulement sa trace horizontale b.

Pour déterminer ce point b, considérons le triangle aOb, ayant pour sommets le point O et les traces horizontales a, b, des côtés OA, OB. Nous connaissons, dans ce triangle, le côté $Oa = o'a$, l'angle $AOB = ao'b''$, et le côté $Ob = o'b'$: car lorsque ce côté Ob a tourné autour de la verticale oo', son extrémité b n'est pas sortie du plan horizontal, dans lequel elle a tracé une circonférence ayant son centre en a.

Si donc, du point o' comme centre, nous décrivons l'arc $b'b''$ qui coupe $o'b''$ en un point b'', et si nous menons ab'', le triangle $ao'b''$ sera le rabattement, autour de Oa, du triangle aOb. Donc la distance $ab = ab''$. Le point b se trouve donc sur la circonférence décrite du point a comme centre avec ab'' pour rayon ; mais il est aussi sur la circonférence décrite du point o comme centre avec ob pour rayon. Donc il est à l'intersection de ces deux circonférences. En menant ob, on obtient l'angle aob, qui est l'angle donné AOB réduit à l'horizon.

104. *Cas particulier.* L'une des droites données est horizontale.

Fig. 156. Si nous prenons toujours pour plan vertical le plan de la face AOC, la droite AO sera parallèle à la ligne de terre ; la construction générale sera donc en défaut.

Pour suppléer au triangle aOb, qui n'existe plus, imaginons, par la trace horizontale b du côté OB, un plan P perpendiculaire à OA. Ce plan rencontrera la droite OA en un point A, sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle AOb. En effet, la droite Ab étant située dans le plan P, est perpendiculaire à OA. De plus, l'angle O de ce triangle rectangle est égal à l'angle des deux droites données. Enfin, l'hypoténuse Ob de ce même triangle est connue, car elle est égale à $o'b'$. Conséquemment, après avoir pris, comme dans le cas général, l'angle $a'o'b''$=AOB, on décrit, du point o' comme centre, l'arc $b'b''$; puis on abaisse $b''b$ perpendiculaire à la ligne de terre. Cette droite rencontre au point cherché b, l'arc décrit du point o comme centre, avec ob' pour rayon. Fig. 136.

PROBLÈME XXXV.

Circonscrire une sphère à une pyramide triangulaire.

105. Le centre de la sphère circonscrite à la pyramide donnée doit être à égale distance des quatre sommets de cette pyramide, puisque la surface de cette sphère doit passer par ces quatre sommets. Il résulte donc de ce qu'on a vu dans la Géométrie élémentaire, que le centre de la sphère demandée sera donné par l'intersection de trois plans élevés perpendiculairement sur les milieux de trois des arêtes. Il faut, bien entendu, avoir soin de prendre trois arêtes non situées dans une même face de la pyramide, car alors les trois plans perpendiculaires se couperaient suivant une même droite.

Afin de rendre les constructions aussi simples que pos-

Fig. 143. sible, on prend, pour plan horizontal de projection, le plan qui passe par trois sommets A, B, C de la pyramide donnée, et pour plan vertical de projection, un plan parallèle à l'arête SA. Alors, cette arête aura pour projection horizontale une droite sA parallèle à xy, et les projections verticales des sommets A, B, C seront les points A′, B′, C′ de la ligne de terre; de sorte que si on joint les projections s et s' du sommet S, respectivement aux projections A, B, C et A′, B′, C′ des sommets de la base de la pyramide, on obtiendra les projections des arêtes qui partent du sommet S. Cela posé, par les milieux m, n des arêtes AB, AC, menons des plans perpendiculaires à ces arêtes; ces plans sont verticaux, et leur intersection est une verticale ayant pour trace le point o de rencontre des perpendiculaires mo et no. On sait que cette droite est le lieu géométrique de tous les points à égale distance des sommets A, B, C; donc elle passe par le centre de la sphère demandée; par suite, ce centre a pour projection horizontale le point o, et il a sa projection verticale située sur $o'o''$ perpendiculaire à la ligne de terre.

Pour déterminer cette projection verticale, on observe que si, par le milieu de SA, on mène un plan perpendiculaire à cette arête, ce plan, perpendiculaire au plan vertical, contiendra le centre. Donc sa trace verticale $p'o'$, perpendiculaire au milieu p' de s'A′, contiendra la projection verticale du centre; et l'intersection o' des lignes $p'o'$ et $o''o'$ sera la projection verticale de ce centre O. Si on tire les droites oA et o'A′, elles seront les projections d'un rayon, dont on construira aisément la vraie grandeur $o'r$.

106. *Remarque.* Les projections de tous les points situés dans l'intérieur de la sphère circonscrite sont comprises

dans les cercles décrits des points o et o' comme centres, avec le rayon $o'r$; par conséquent, ces cercles peuvent être regardés comme les projections des *contours apparents* de la sphère, relatifs à chacun des plans de projection.

PROBLÈME XXXVI.

Inscrire une sphère dans une pyramide triangulaire.

107. Le centre de la sphère inscrite dans la pyramide donnée doit se trouver à égale distance des quatre faces de cette pyramide; par conséquent ce centre est à l'intersection des plans qui divisent les six angles dièdres de la pyramide, chacun en deux parties égales. Pour le déterminer, il faut prendre trois de ces six plans bissecteurs, pourvu toutefois qu'ils ne passent pas par le même sommet de la pyramide (car, dans ce cas, ils se couperaient suivant une droite), et chercher leur point d'intersection.

Afin de simplifier les constructions, on prend, comme dans le problème qui précède, la base ABC de la pyramide pour plan horizontal de projection. Fig. 142.

Si on considère les trois plans bissecteurs des angles dièdres qui ont pour arêtes les côtés de cette base, on reconnaît que ces plans forment, par leurs intersections, un tétraèdre OABC, ayant même base que la pyramide donnée, et dont le sommet O, intérieur à la pyramide, est le centre de la sphère demandée. Il suit de là que la section de ce tétraèdre par un plan horizontal quelconque $x'y'$, sera un triangle ayant ses côtés respectivement parallèles à ceux de la base ABC; donc les projections horizontales de ces

côtés seront des parallèles ab, ac, bc, à AB, AC, BC. Si ces projections étaient connues, le problème serait résolu. En effet, les prolongements des droites Aa, Bb, Cc, étant les projections horizontales des arêtes OA, OB, OC de la pyramide OABC, devront se couper en un point o, projection horizontale du centre O de la sphère inscrite; et les projections verticales correspondantes A$'a'$, B$'b'$, C$'c'$ devront pareillement concourir en un point o', projection verticale de ce centre.

La question est donc réduite à construire la projection horizontale abc de la section faite dans la pyramide OABC par le plan horizontal $x'y'$.

Pour déterminer le côté bc, on suppose qu'on mène, par le sommet S de la pyramide, un plan vertical perpendiculaire à BC. Ce plan coupe la base ABC et la face SBC de la pyramide suivant des droites sp, Sp perpendiculaires à BC, et dont l'angle Sps mesure l'inclinaison des plans ABC et SBC; de sorte que si l'on conçoit la bissectrice de cet angle, elle appartiendra à la face OBC du tétraèdre OABC. Cela posé, on fait tourner le plan Sps autour de la verticale Ss de manière à le rendre parallèle au plan vertical de projection. Alors sp se projette sur la ligne de terre en $s''p'=sp$, l'hypoténuse Sp se projette sur $s'p'$, et la bissectrice de l'angle Sps a pour projection la bissectrice de l'angle $s'p's''$. Actuellement, si on conçoit le triangle $s's''p'$ rétabli dans sa première position, il est évident que le point m', où $p'm'$ rencontre $x'y'$, se placera en un point qui sera l'intersection du plan horizontal $x'y'$ avec la bissectrice de l'angle Sps, et qui se projettera en m. Donc, en menant par ce point m une parallèle bc à BC, on aura le premier côté du triangle abc.

On construira de la même manière les projections ab, ac des intersections du plan $x'y'$ avec les deux plans OAB, OAC. Le triangle abc étant construit, on obtiendra, comme on l'a expliqué, les projections o et o' du centre O de la sphère inscrite; et, si la construction est bien faite, la droite oo' sera perpendiculaire à xy.

La sphère est tangente au plan horizontal; donc son rayon est égal à $o'o''$, élévation du centre au-dessus de ce plan.

PROBLÈME XXXVII.

Construire une sphère tangente aux quatre faces d'un tétraèdre.

108. Ce problème est la généralisation du précédent. Si l'on suppose, en effet, que les quatre plans qui composent les faces d'un tétraèdre soient indéfiniment prolongés, on pourra se proposer de chercher toutes les sphères qui touchent à la fois ces quatre plans.

Afin de déterminer, en premier lieu, quel peut être le nombre de ces sphères, observons que le plan de la base ABC du tétraèdre, prolongé indéfiniment, forme, avec les trois autres faces, six angles dièdres dont trois sont *intérieurs*, et dont les trois autres sont *extérieurs*.

Pour qu'un point soit également distant des quatre faces du tétraèdre, il faut qu'il soit situé sur trois des plans bissecteurs de ces six angles dièdres. Si donc P, Q, R sont les plans bissecteurs des angles *intérieurs*, et que P′, Q′, R′ soient les plans bissecteurs des angles *extérieurs*, il y aura autant de sphères satisfaisant à la question, qu'il

y aura de points déterminés par les combinaisons suivantes des plans bissecteurs :

P, Q, R;	P, Q, R′;	P, Q′, R′;	P′, Q′, R′.
	Q, R, P′;	Q, R′, P′;	
	R, P, Q′;	R, P′, Q′.	

Le nombre de ces points, et par conséquent le nombre des sphères cherchées, est donc au plus égal à *huit*.

109. La sphère déterminée par les plans P, Q, R, c'est-à-dire la sphère *inscrite* au tétraèdre, existe toujours.

Il en est de même pour les *quatre* sphères déterminées par les plans

P, Q, R′;
Q, R, P′;
R, P, Q′;
P′, Q′, R′,

que l'on appelle *sphères ex-inscrites*, et qui sont telles, que chacune d'elles touche une des faces du tétraèdre et les prolongements des trois autres faces.

Considérons, par exemple, les trois plans bissecteurs P′, Q′, R′. Il est évident que chacun de ces plans fait, avec le *prolongement* de la face ABC, *un angle dièdre aigu;* conséquemment, ces trois plans ne peuvent se couper deux à deux suivant des droites parallèles, de manière à former les faces d'un prisme triangulaire; donc *ils se coupent en un seul point, centre de la sphère ex-inscrite suivant la face* ABC. La même démonstration s'appliquerait aux sphères ex-inscrites suivant les trois autres faces, et il est facile de

reconnaître que leurs centres seraient donnés par les combinaisons

P, Q, R′;
Q, R, P′;
R, P, Q′;

des six plans bissecteurs.

110. Considérons maintenant le tétraèdre ABCD, et supposons que l'on prolonge ses différentes faces ainsi que l'indique la figure; il est clair que l'on obtiendra deux espaces indéfinis BCEFGH, ADIKLM, terminés chacun par quatre plans, et s'appuyant sur les deux arêtes opposées BC, AD. Ces espaces, dont la forme est assez bien indiquée par celle d'un *comble à quatre pentes*, ont été désignés sous les noms d'*angles prismatiques* et de *bi-angles*. On comprend que, dans certains cas, une sphère puisse être inscrite dans un angle prismatique. Il semblerait, d'après cette considération, que le nombre des sphères inscrites dans les *six* angles prismatiques obtenus en considérant ces trois couples d'arêtes opposées, puisse s'élever à six; mais il est aisé de démontrer que si l'on peut inscrire une sphère dans l'angle prismatique BCEFGH, on n'en pourra pas inscrire dans l'angle prismatique opposé, et réciproquement. Fig. 166.

En effet, quelle que soit la position de la sphère cherchée, son centre doit se trouver sur les plans bissecteurs des angles dièdres *intérieurs* dont les arêtes sont AD et BC. Le premier plan bissecteur rencontre l'arête BC en un point U *situé entre* B et C. De même, le second plan bissecteur rencontre AD en un point V, *situé entre* A et D. Le centre cherché doit donc se trouver sur la droite UV, *intersection*

des deux plans bissecteurs. Ce centre doit aussi se trouver sur le plan R′, bissecteur de l'angle dièdre *extérieur* ayant pour arête AB ; d'ailleurs une droite ne peut rencontrer un plan qu'en un seul point ; donc, etc.

On peut observer encore que le plan R′ est extérieur au tétraèdre, dans lequel est située la droite UV ; donc le centre de la sphère dont il s'agit sera *sur le prolongement* de UV, soit en O′, dans l'angle prismatique BCEFGH, soit en O″, dans l'angle prismatique ADIKLM.

S'il arrive que le plan R′ soit parallèle à la droite UV, alors le centre de la sphère est transporté à l'infini, ou plutôt cette sphère n'existe pas.

Au lieu de déterminer le centre O′ ou le centre O″ par l'intersection du plan P passant suivant BC, du plan R′ passant suivant AB et du plan bissecteur ADU, on pourrait l'obtenir au moyen de la combinaison des plans P, R′ et Q′ ; en supposant que Q′ soit le plan bissecteur de l'angle dièdre extérieur dont l'arête est AC. Nous retombons ainsi sur la combinaison P, R′, Q′, indiquée plus haut.

Nous voyons donc que les sphères déterminées par les combinaisons

P, R′, Q′,
Q, P′, R′,
R, Q′, P′,

peuvent, en tout ou en partie, ne pas exister ; c'est-à-dire que le nombre des solutions du problème peut être réduit à *cinq*. Mais peut-il s'élever à *huit*, à *sept* ou même à *six*? C'est ce qu'il convient d'examiner. Il faut bien remarquer en effet que, dans les développements précédents, rien ne

prouve qu'en général la droite UV rencontrera le plan R′, ou, ce qui est la même chose, que les plans P, R′, Q′ se couperont en un point unique.

111. Afin d'éclaircir cette partie de la question, nous commencerons par démontrer la proposition suivante.

Théorème I. — *Dans tout tétraèdre, le plan bissecteur de chaque angle dièdre partage l'arête opposée en deux segments proportionnels aux aires des faces adjacentes.*

Considérons, par exemple, le plan AUD, qui divise en deux parties égales l'angle dièdre intérieur dont l'arête est AD. Il s'agit de démontrer que

$$\frac{BU}{CU}=\frac{C}{B};$$

en représentant l'aire d'une face par la lettre qui indique le sommet opposé à cette face.

Projetons la figure sur un plan quelconque, perpendiculaire à AD. Cette droite aura pour projection un point I; Fig. 167.
et les plans ABD, AUD, ACD, étant perpendiculaires au plan de projection, auront pour traces des droites IB′, IU′, IC′ telles, que IU′ *sera la bissectrice de l'angle formé par* IB′ et IC′. Enfin, la droite BUC se projettera suivant une droite B′U′C′.

Cela posé, le théorème de géométrie élémentaire donne

$$\frac{B'U'}{C'U'}=\frac{B'I}{C'I}.$$

Mais il est clair que B′U′, C′U′ sont des droites proportionnelles à BU, CU, et que B′I, C′I sont égales, respectivement, aux perpendiculaires abaissées des points B, C sur la base AD des triangles ABD, ACD. La pro-

portion précédente revient donc à celle qu'il s'agissait de démontrer.

Fig. 166. 112. Supposons qu'après avoir mené la droite UV, déterminée par les proportions

$$\frac{BU}{CU}=\frac{C}{B},\quad \frac{AV}{DV}=\frac{D}{A},$$

on mène, semblablement, la droite ST, qui rencontre les arêtes opposées AB, CD, de manière que

$$\frac{AS}{BS}=\frac{B}{A},\quad \frac{DT}{CT}=\frac{C}{D}.$$

D'après ce qui précède, *chacune de ces droites doit contenir le centre de la sphère inscrite au tétraèdre;* donc, puisque ce centre existe toujours, les deux droites se coupent. De là, ce théorème :

Théorème II. — *Les droites qui partagent les arêtes opposées d'un tétraèdre, chacune en deux segments additifs proportionnels aux faces adjacentes à ses deux extrémités, se coupent toutes les trois en un même point, centre de la sphère inscrite au tétraèdre.*

113. Du reste, on peut démontrer directement que les droites UV, ST se coupent, en observant que les proportions précédentes donnent

$$AV.DT.CU.BS = AS.BU.CT.DV.$$

114. Au lieu de partager les arêtes en segments additifs, supposons qu'on les partage en segments soustractifs, de manière à satisfaire aux proportions

$$\frac{AX'}{CX'}=\frac{C}{A},\quad \frac{DY'}{BY'}=\frac{B}{D},\quad \frac{DT'}{CT'}=\frac{C}{D},\quad \frac{AS'}{BS'}=\frac{B}{A}.$$

Comme ces proportions donnent

$$AS'.BY'.CX'.DT'=AX'.BS'.CT'.DY',$$

on conclut encore que les droites S'T' X'Y' sont dans un même plan. Donc, *en général*, elles se couperont en un même point O', situé aussi sur la droite VU. Ce point sera le centre de l'une des sphères inscrites dans les angles prismatiques.

115. Pour que cette sphère n'existe pas, il faut que les droites UV, X'Y', lesquelles sont *toujours dans un même plan*, soient parallèles entre elles. Cherchons dans quel cas aura lieu ce parallélisme.

Les proportions

$$\frac{AX'}{CX'}=\frac{C}{A},\ \frac{CT}{DT}=\frac{D}{C},\ \frac{DV}{AV}=\frac{A}{D}.$$

donnent $$AX'.CT.DV=CX'.DT.AV;$$

ainsi, les points X', T, V sont en ligne droite, et AVX' est un triangle. A cause de la transversale DTC, nous aurons donc, $$AC.TX'.DV=AD.VT.CX'.$$

De même, UTY' est une droite; et le triangle BUY', coupé par la transversale DTC, donne

$$BC.UT.DY'=BD.TY'.CU.$$

Maintenant, les deux droites VU, X'Y' étant supposées parallèles, on a

$$\frac{VT}{UT}=\frac{TX'}{TY'}.$$

Si on multiplie membre à membre les deux premières égalités, et qu'on ait égard à cette dernière, on obtient

$$AC.BC.DV.DY'=AD.BD.CU.CX'$$

ou $$\frac{AC}{CX'}.\frac{BC}{CU}=\frac{AD}{DV}.\frac{BD}{DY'}.$$

Mais, ainsi qu'il est aisé de le reconnaître,

$$\frac{AC}{CX'}=\frac{C-A}{A},\quad \frac{BC}{CU}=\frac{B+C}{B},\quad \frac{AD}{DV}=\frac{A+D}{A},\quad \frac{BD}{DY'}=\frac{D-B}{B};$$

donc $$(C-A)(B+C)=(A+D)(D-B),$$

ou $$\frac{C-A}{D-B}=\frac{A+D}{B+C}=\frac{C+D}{C+D}.$$

Cette proportion exige que $A+D=B+C$.

Ainsi, pour que la sphère O′ disparaisse, *il faut et il suffit que la somme des aires des faces qui ont* AD *pour arête commune, soit équivalente à la somme des deux autres faces.*

116. Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que l'on n'a pas, à la fois, $C=A$ et $D=B$. Si ces deux conditions étaient vérifiées, les points X′ et Y′ seraient transportés à l'infini, aussi bien que la sphère O′. En même temps, comme les sommes $A+B$ et $C+D$ seraient égales, la sphère inscrite dans l'un des angles prismatiques ayant pour arêtes AD ou CD, aurait un rayon infini. C'est-à-dire que le nombre des sphères tangentes aux quatre plans serait réduit à *six*.

117. En résumé :

1° *Quand la somme des aires de deux des faces du tétraèdre est égale à la somme des aires des deux autres faces, les sphères de la troisième espèce se réduisent à deux;*

2° *Si les faces du tétraèdre sont équivalentes deux à deux, il n'y a plus qu'une sphère de la troisième espèce;*

3° *Enfin, si les quatre faces du tétraèdre sont équivalentes entre elles, les sphères inscrites dans les angles prismatiques se transportent toutes les trois à l'infini.*

On vérifie ces conclusions en cherchant les relations qui existent entre les rayons des trois sphères, les aires des faces, et le volume V du tétraèdre; ces relations sont

$$\pm V = \frac{1}{3} R_1 (A + B - C - D),$$

$$\pm V = \frac{1}{3} R_2 (A + C - B - D),$$

$$\pm V = \frac{1}{3} R_3 (A + D - B - C).$$

CHAPITRE VI.

Exercices.

PROBLÈME XXXVIII.

Connaissant l'une des projections d'un point situé dans un plan donné, trouver la position qu'occupe ce point, lorsqu'on rabat, sur le plan horizontal, le plan donné.

Fig. 144. 118. Soit o la projection horizontale donnée. Nous commençons par chercher la projection verticale correspondante o'.

Pour avoir ensuite le rabattement du point O sur le plan horizontal, on observe que ce point, en tournant autour de la trace horizontale $a\alpha$, décrit dans l'espace une circonférence dont le plan est perpendiculaire à $a\alpha$, dont le centre est le pied de la perpendiculaire abaissée du point O sur cette droite, et dont le rayon est égal à cette perpendiculaire. Si donc, de la projection horizontale o, nous abaissons ohg perpendiculaire à $a\alpha$, le point h, où ces deux droites se coupent, sera le centre de la circonférence décrite par le point O; et le rabattement cherché sera situé sur hg, à une distance du point h égale à Oh. D'ailleurs, cette dernière distance se construit facilement à l'aide d'un triangle rectangle hoO$'$. On obtient donc, pour rabattement du point O, le point O$''$.

119. *Remarque.* La projection horizontale o d'un point O situé dans un plan $a\alpha a'$, et le rabattement O″ du point O sur le plan horizontal, sont toujours sur une même perpendiculaire oO'' à la trace horizontale $a\alpha$ du plan $a\alpha a'$.

PROBLÈME XXXIX.

Connaissant le rabattement d'un point situé dans un plan donné, construire les deux projections de ce point.

120. On suppose que le plan $a\alpha a'$, ayant tourné autour de sa trace horizontale $a\alpha$, pour se rabattre sur le plan horizontal, le point O du plan $a\alpha a'$ soit venu en O″; et l'on demande les deux projections de ce point O. Fig. 145.

Pour cela, on abaisse $O''h$ perpendiculaire sur la trace horizontale $a\alpha$, et on observe que la projection horizontale o du point O doit se trouver sur cette perpendiculaire. Si on considère ensuite le triangle rectangle Ooh, on connaît, dans ce triangle, l'hypoténuse Oh égale à $O''h$, et l'angle Oho égal à l'angle θ que forme le plan donné $a\alpha a'$ avec le plan horizontal. Or, cet angle θ, ainsi que nous l'avons vu plusieurs fois, s'obtient facilement en construisant le rabattement hn de l'intersection du plan donné avec le plan hmm', perpendiculaire à αa.

Si donc l'on porte sur hn une longueur $hO'=hO''$, et si l'on abaisse $O'o$ perpendiculaire à hm, le triangle $O'oh$ sera égal au triangle Ooh, et le pied o de la perpendiculaire $O'o$ sera la projection horizontale du point O.

La projection verticale du point O doit d'ailleurs se trouver sur oo'' perpendiculaire à xy, et à une distance de cette droite égale à Oo.

PROBLÈME XL.

Connaissant l'une des projections d'une droite située dans un plan donné, trouver le rabattement de cette droite.

Fig. 146. 121. Soit *bc* la projection horizontale de la droite donnée, située dans le plan $a\alpha a'$. Il est évident que pour obtenir le rabattement de cette droite sur le plan horizontal, il suffit de déterminer les rabattements de deux de ses points, et de les joindre par une ligne droite. Afin de simplifier les constructions, on choisit, pour ces points, les traces de la droite, parce que la trace horizontale *c*, appartenant à la trace horizontale du plan donné $a\alpha a'$, est elle-même son rabattement, et que l'on n'a plus qu'à déterminer le rabattement B′ de la trace verticale *b′* de la droite donnée. On obtient ainsi B′*c* pour le rabattement de cette ligne.

PROBLÈME XLI.

Connaissant le rabattement d'une droite située dans un plan donné, construire les deux projections de cette droite.

Fig. 146. 122. Soit *c*B′ le rabattement, sur le plan horizontal, d'une droite située dans le plan donné $a\alpha a'$. Si on cherche les projections horizontales et verticales de deux points quelconques de la droite rabattue *c*B′ (problème XXXIX), et qu'on joigne par des droites ces projections horizontales et ces projections verticales, il est évident qu'on obtiendra les projections de la droite cherchée. Afin de simplifier les

constructions, on prend, pour l'un de ces points, la trace horizontale c de la droite.

PROBLÈME XLII.

Trouver, sur une droite donnée, un point dont la distance à un point donné soit égale à une longueur donnée.

123. Soient o, o' et bc, $b'c'$ les projections du point donné et de la droite donnée. Par ce point et cette droite on fait passer un plan $a\alpha a'$ que l'on rabat sur le plan horizontal en le faisant tourner autour de sa trace horizontale. On détermine les rabattements O et cB du point et de la droite. On décrit ensuite du point O comme centre, avec un rayon égal à la longueur donnée, un arc de cercle qui coupe cB en deux points M et N. Ces points sont les rabattements de deux points satisfaisant à la question, et dont les projections m, m' et n, n' s'obtiennent facilement. Fig. 147.

PROBLÈME XLIII.

Mener à une droite donnée, située dans un plan donné, une parallèle qui en soit distante d'une longueur donnée.

124. Soient bc, $b'c'$ les deux projections de la droite donnée, laquelle est située dans le plan $a\alpha a'$. On cherche le rabattement cB de cette droite sur le plan horizontal. On mène kp parallèle à cB et à une distance égale à la longueur donnée l; cette ligne est le rabattement de la parallèle demandée; de sorte que le point k, où kp rencontre la trace horizontale $a\alpha$ du plan $a\alpha a'$, est la trace horizontale de celle Fig. 148.

parallèle. Le point k, appartenant au plan horizontal, a pour projections k et k'; donc les droites kq et $k'q'$, menées par les points k et k' parallèlement à bc et $b'c'$, sont les deux projections de la droite cherchée.

Le problème admet toujours deux solutions.

PROBLÈME XLIV.

Mener un plan parallèle à un plan donné, et qui en soit distant d'une longueur donnée.

Fig. 149. 125. Coupons le plan donné $a\alpha a'$ par un plan $b\beta b'$, perpendiculaire à la trace horizontale $a\alpha$, et, par conséquent, perpendiculaire au premier plan. Soit mn le rabattement, sur le plan horizontal, de l'intersection de ces deux plans. Si nous menons pq parallèle à mn, de manière que leur distance soit égale à la longueur donnée, cette droite pq sera évidemment le rabattement de l'intersection du plan cherché et du plan auxiliaire $b\beta b'$; et le point p, où pq coupe $b\beta$, appartiendra à la trace horizontale du plan cherché. Ce plan est donc $c\gamma c'$.

Il est clair que le problème admet une seconde solution.

PROBLÈME XLV.

Trouver les projections d'une circonférence passant par trois points donnés.

Fig. 151. 126. Soient (a, a'), (b, b') et (c, c') les trois points donnés. On fait passer un plan $m\alpha m'$ par ces trois points, puis on fait tourner ce plan autour de sa trace horizontale $m\alpha$, afin de le rabattre sur le plan horizontal de projection; et on

détermine les rabattements A′, B′, C′ des trois points donnés. On décrit ensuite la circonférence qui passe par ces trois points; et il ne s'agit plus que de revenir du rabattement aux deux projections.

Or, si l'on prend, sur la circonférence O′, un certain nombre de points M′, N′, P′...; qu'on cherche les projections correspondantes *m′*, *n′ p′*...; enfin, qu'on unisse les deux séries de points ainsi obtenus, par deux *traits continus* *mnp*..., *m′n′p′*...; ces deux *ellipses* *mnp*..., *m′n′p′*... seront les projections cherchées (*).

Pour compléter l'épure, on construit les projections *o*, *o′* du centre de la circonférence. Ces deux points sont les *centres* des ellipses correspondantes.

127. *Cas particuliers.* 1° Les projections horizontales des trois points donnés sont situées sur une même droite parallèle à la ligne de terre.

Les projections horizontales *a*, *b*, *c* de ces trois points étant sur une parallèle à *xy*, le plan de la circonférence cherchée est parallèle au plan vertical; donc elle se projette sur le plan vertical en véritable grandeur; et sa projection horizontale est dirigée suivant la droite *abc*. Fig. 152.

2° Les projections horizontales des trois points donnés sont sur une même droite non parallèle à la ligne de terre.

On ramène ce cas à celui qui précède en faisant tourner le plan vertical des trois points autour de la verticale (*a*, *aa′*), jusqu'à ce qu'il soit devenu parallèle au plan vertical de projection. Fig. 153.

(*) Voir la note à la fin de l'ouvrage.

PROBLÈME XLVI.

Par un point donné, mener une droite qui fasse, avec la ligne de terre, un angle donné.

128. Supposons le problème résolu, et faisons tourner la
Fig. 154. droite cherchée ($o\alpha$, $o'\alpha$), autour de la ligne de terre, jusqu'à ce qu'elle se rabatte sur le plan horizontal. Dans ce mouvement, le point α, où cette droite rencontre xy, ne variera pas. D'ailleurs, le point donné (o, o') se rabat en m, à une distance de la ligne de terre, égale à l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit seraient oh et $o'h$. Si donc, par ce point m, nous menons une droite $m\alpha$ qui coupe xy sous l'angle donné, nous obtiendrons le point inconnu α.

PROBLÈME XLVII.

Par un point donné, mener une droite qui coupe, sous un angle donné, une droite donnée.

129. Ce problème est la généralisation de celui qui précède. Pour le résoudre, on fait passer un plan par le point O et par la droite AB ; on rabat ce plan sur l'un des plans de projection ; par le rabattement du point O on mène une droite qui coupe, sous l'angle donné, le rabattement de AB : la droite ainsi tracée est le rabattement de celle que l'on cherche. Il ne reste plus qu'à revenir du rabattement aux projections. Les constructions sont effectuées dans la figure 150.

Le problème admet évidemment deux solutions.

PROBLÈME XLVIII.

Connaissant la projection verticale d'une droite, un de ses points, et l'angle qu'elle fait avec le plan horizontal, construire sa projection horizontale.

130. Soit $a'b'$ la projection verticale de la droite, et soient o, o' les deux projections de l'un de ses points. Il est clair que la droite sera déterminée quand on connaîtra sa trace horizontale a. Fig. 157.

Or, si l'on conçoit qu'on joigne le point a au point donné O et à sa projection horizontale o, on obtiendra un triangle Ooa rectangle en o, dans lequel on connaît le côté Oo=$o'h$, et l'angle Oao=θ. Si on mène, dans le plan vertical, la droite $o'k$ sous l'inclinaison $o'kh$=θ, le triangle $o'kh$ sera égal au triangle Ooa, et le côté hk sera égal à la distance oa. Donc, si du point o comme centre, avec hk pour rayon, on décrit un arc qui coupe la perpendiculaire $a'm$ en a, ce point sera la trace horizontale de la droite demandée.

Par suite, la projection horizontale de cette droite sera la ligne ao.

131. *Remarque.* Le problème admet généralement deux solutions ; il peut n'en admettre qu'une ; il peut être impossible.

PROBLÈME XLIX.

Par un point donné, mener une droite qui fasse avec le plan horizontal un angle donné, et qui rencontre une droite donnée, située dans ce plan.

132. Ce problème ne diffère du précédent qu'en ce que la trace horizontale c de la droite cherchée, au lieu de se trouver sur une droite aa', perpendiculaire à la ligne de terre

[illegible] droite donnée *ab* (fi-

[illegible] nférence décrite du [illegible] yon, coupe la droite [illegible] e cela a lieu dans la [illegible] (*od*, *o'd'*), qui satis- [illegible] vence est tangente à [illegible] ne solution. Enfin, il [illegible] ne rencontre pas la

[illegible] **[illegible] c un plan donné, un angle [illegible] située dans ce plan.**

[illegible] s du point donné O; [illegible] r ce point, une droite [illegible] et qui rencontre la [illegible] baissons du point O [illegible] plan *aαa'*, et cher- [illegible] ndeur *p'k'* de cette [illegible] comme dans le pro- [illegible] nt inconnu M, où la [illegible] (*bc*, *b'c'*), au pied [illegible] t d'être question : [illegible] e facile à construire. [illegible] endiculaire $rs=p'k'$ [illegible] n $sqr=\theta$; on forme [illegible] st égal au côté PM

[illegible] ance du point P au

oint, on fait
tale $a\alpha$, on
es rabatte-
$b'c'$). Puis
r rayon, on
e point M′
nséquent, si
les joindre
rchées om,

plan donné,
nce.

donnée AB, Fig. 169
de ce plan
os du point
pied de cette
rencontre CD
en I, l'angle
stance d'un
ment déter-
ngle $O_1I_1M_1$
gal à IM. Il
uver la ren-
e rayon IM,
se fait aisé-

PROBLÈME LII.

Par un point donné, mener une droite qui fasse, avec les plans de projection, des angles donnés.

Fig. 160. 136. 1° Supposons que le point donné (a, a') appartienne au plan vertical, et qu'on veuille mener par ce point une droite qui fasse un angle α avec le plan horizontal et un angle β avec le plan vertical. Cette droite forme, avec sa projection horizontale et avec aa', un triangle rectangle dans lequel on connaît le côté aa' et l'angle opposé à ce côté, lequel est égal à α. Pour rabattre ce triangle en vraie grandeur sur le plan vertical, il suffit de mener la ligne $a'h$ sous l'inclinaison $a'ha=\alpha$. Cette ligne $a'h$ est la vraie longueur de la partie de la droite demandée, comprise entre les deux plans de projection.

Cette même droite forme, avec sa projection verticale et avec bb', un autre triangle rectangle, dont l'hypoténuse égale $a'h$, et dans lequel l'angle aigu adjacent au sommet a' est égal à β. Par conséquent, pour construire un triangle hka' égal à $a'b'b$, il suffit de décrire, sur ha' comme diamètre, une demi-circonférence, de mener $a'k$ sous l'inclinaison $ka'h=\beta$, et enfin de tracer hk. Cela posé, en décrivant l'arc kb' du point a' comme centre et tirant $b'a'$, on obtient la projection verticale de la droite demandée; puis, en élevant $b'b$ perpendiculaire à xy, décrivant l'arc hb du point a comme centre, et joignant ab, on obtient la projection horizontale de cette droite.

Comme vérification, il faut que bb' soit égal à hk.

2° Si le point donné, au lieu d'être situé sur le plan ver-

[illegible] suffirait, pour [illegible] $p'q'$ respec-

[illegible] ontales de deux [illegible] verticales.

Fig. 161.

[illegible] les des deux [illegible] eux droites [illegible] té horizon- [illegible] ections hori- [illegible] droite bd qui [illegible] et que l'on [illegible] le point O″, [illegible] dé comme le [illegible] r le triangle [illegible] ce moyen, [illegible] gle bOd. Or, [illegible] ctangle Oop, [illegible] mène oO′ [illegible] centre, avec [illegible] cle qui coupe [illegible] triangle Oop. [illegible] élévation du [illegible] u plan hori- [illegible] sera la pro- [illegible] droites.

PROBLÈME LIV.

Construire un plan, connaissant sa trace horizontale et l'angle qu'il fait avec le plan horizontal de projection.

Fig. 162. 138. Supposons que $a\alpha$ soit la trace horizontale du plan qu'il s'agit de construire. En un point quelconque m de $a\alpha$, menons un plan mpa' perpendiculaire à $a\alpha$; il coupera le plan cherché suivant une droite qui a pour trace horizontale le point m, qui fait avec mp l'angle donné θ, et qui perce le plan vertical en un point inconnu a'. Pour déterminer ce point, on peut rabattre le triangle rectangle mpa' sur le plan horizontal; il suffit, pour cela, d'élever sur mp la perpendiculaire pr, et de mener la droite mr sous l'inclinaison $rmp = \theta$. On obtiendra donc le point a' en décrivant un arc de cercle du point p comme centre, avec pr pour rayon.

139. *Remarque.* Ce problème se déduit immédiatement du problème XXIII; il en est de même du suivant.

PROBLÈME LV.

Construire un plan, connaissant sa trace horizontale et l'angle qu'il fait avec le plan vertical de projection.

Fig. 162. 140. Soit $a\alpha$ la trace horizontale du plan. Pour trouver sa trace verticale, d'un point m pris à volonté sur la trace horizontale $a\alpha$, on abaisse ms perpendiculaire à xy, et on mène mk sous l'inclinaison $mks = \theta$. Enfin, du point s comme centre, avec sk pour rayon, on décrit un arc de cercle, auquel on mène une tangente par le point α. Cette tangente sera la trace verticale du plan.

141. *Discussion.* Lorsque le point α est situé hors de la circonférence décrite du point s comme centre, avec sk pour rayon, on peut mener à cette circonférence deux tangentes; et par conséquent il y a deux solutions. Lorsque le point α est situé sur la circonférence, il n'y a qu'une solution, et le plan est perpendiculaire au plan vertical. Enfin, le problème est impossible lorsque le point α est situé dans l'intérieur de la circonférence.

PROBLÈME LVI.

Par une droite donnée, faire passer un plan qui fasse avec le plan horizontal un angle donné.

142. Les traces du plan cherché doivent passer par les traces a et b de la droite donnée. Pour achever de déterminer ce plan, on suppose sa trace horizontale $a\alpha$ connue; on abaisse bp perpendiculaire à $a\alpha$, et on joint le point b' au point p; on obtient ainsi, dans l'espace, un triangle rectangle $b'pb$, dans lequel on connaît le côté $b'b$ et l'angle $b'pb=\theta$ opposé à ce côté. On peut rabattre ce triangle sur le plan vertical, en $b'bq$; et l'on détermine ainsi la vraie grandeur bq de la distance entre le point b et la trace horizontale inconnue $a\alpha$. On obtiendra donc cette trace horizontale en décrivant un arc de cercle du point b comme centre, avec bq pour rayon, et en menant à cet arc, par le point a, une tangente ap. Fig. 163.

143. *Discussion.* Lorsque la trace horizontale a de la droite donnée est située hors de la circonférence décrite du point b comme centre, avec bq pour rayon, il y a deux plans, $a\alpha b'$ et $a\beta b$, qui répondent à la question. Quand le point a est situé sur la circonférence, il n'y a qu'une solution; enfin

le problème est impossible lorsque le point a est situé dans l'intérieur de la circonférence.

PROBLÈME LVII.

Étant donnés un plan et une droite située dans ce plan, mener par cette droite un second plan qui fasse avec le premier un angle donné.

Fig. 164. **144.** Soient $b\alpha a'$ le plan donné, et ab, $a'b'$ les deux projections de la droite donnée. Pour mener par cette droite un plan qui fasse avec le premier un angle donné θ, élevons en un point quelconque O de cette même droite, un plan qui lui soit perpendiculaire. Ce plan aura pour trace horizontale une droite ph perpendiculaire à ab, et il coupera le plan donné et le plan cherché suivant deux droites qui partiront du point O et qui feront en ce point l'angle θ. La première de ces droites perce le plan horizontal au point p, et la seconde le rencontre en un point inconnu q de la ligne ph. Si on suppose ce point connu, on aura dans l'espace un triangle pOq dans lequel on connaît l'angle $pOq = \theta$, et le pied h de la hauteur hO; par conséquent, pour construire ce triangle, il suffit de déterminer sa hauteur. Or, elle est perpendiculaire à la droite donnée (ab, $a'b'$); si donc on rabat cette dernière droite sur le plan vertical en $a's$, et que du point r, où se transporte le point h, on abaisse rk perpendiculaire sur $a's$, on connaîtra la vraie grandeur rk de la hauteur Oh du triangle pOq. Prenant donc sur hb une longueur $hm = rk$, joignant mp, et tirant la ligne mq sous l'inclinaison $qmp = \theta$, on obtient un triangle qmp égal au triangle pOq de l'espace, et, par conséquent, on détermine le point q. Ce point étant connu, on le joint au point b, et on

a la trace horizontale $b\beta$ du plan cherché. Quant à sa trace verticale, on l'obtient en joignant le point β au point a'.

PROBLÈME LVIII.

Par un point donné, faire passer un plan qui fasse, avec les deux plans de projection, des angles donnés.

145. Supposons d'abord que le point donné (o, o') appartienne au plan horizontal; et soit $o\alpha k$ le plan cherché, qui doit faire, avec les deux plans de projection, les angles donnés α et β. Fig. 165.

Du point o, menons la droite oh sous l'inclinaison $oho'=\beta$: le triangle oho' peut être considéré comme étant le rabattement de la section faite par un plan $oo'd$, perpendiculaire à la trace verticale inconnue αk. Conséquemment, cette trace verticale sera tangente à la circonférence décrite du point o' comme centre, avec $o'h$ pour rayon.

D'un autre côté, si nous imaginons par le point o' une verticale $o'k$ et une perpendiculaire au plan cherché, l'angle de ces deux droites devra être égal à α. Or, la seconde de ces deux droites est située dans le plan $oo'd$; donc elle a pour rabattement $o'm$ perpendiculaire à oh. Il suit de là que si on mène $o'n$ sous l'inclinaison $no'm=\alpha$, on doit avoir $o'n=o'k$. Le point k se trouve donc à l'intersection de $o'k$ et de la circonférence décrite du point o' comme centre, avec $o'n$ pour rayon. En menant par ce point une tangente kd à l'arc hd, on obtient la trace horizontale $k\alpha$ du plan cherché. Quant à sa trace verticale, on l'obtient en joignant le point α au point o.

Si l'on suppose maintenant que le point donné, au lieu

d'être situé sur le plan horizontal, occupe dans l'espace une position quelconque (p,p'), il suffira, pour résoudre la question, de mener par (p,p') un plan $b\beta b'$ parallèle au plan $o\alpha k$

PROBLÈME LIX.

Par un point donné, faire passer un plan qui soit perpendiculaire à un plan donné, et qui fasse, avec le plan horizontal, un angle donné.

146. Du point donné, on abaisse une perpendiculaire sur le plan donné; puis on fait passer par cette perpendiculaire un plan qui fasse, avec le plan horizontal de projection, l'angle donné θ. Il est clair que ce plan sera perpendiculaire au plan donné. Par conséquent, il répondra à la question

PROBLÈME LX.

Étant donnée la projection horizontale d'une droite perpendiculaire à une droite donnée en un point donné, trouver sa projection verticale.

147. Supposons que AB soit une droite donnée, que l'on connaisse la projection horizontale d'une droite AP perpendiculaire à AB au point donné A, et qu'on demande la projection verticale de AP. Pour résoudre ce problème, on mènera par le point A un plan perpendiculaire à la droite donnée AB; ce plan contiendra nécessairement la droite cherchée AP. Par conséquent, on sera conduit à chercher la projection verticale d'une droite située dans un plan donné, connaissant la projection horizontale de cette ligne. (Problème IX.)

PROBLÈME LXI.

Trouver l'intersection de deux plans, donnés par leurs traces horizontales et les angles qu'ils font avec le plan horizontal de projection.

148. Supposons que les traces horizontales des deux plans P, Q soient les droites $a\alpha$, $b\beta$, et que θ et ω soient les angles qu'ils font avec le plan horizontal. Par le point c, où se coupent les traces horizontales, faisons passer deux plans, l'un perpendiculaire à $a\alpha$, l'autre perpendiculaire à $b\beta$. Ces deux plans verticaux auront pour traces horizontales cd perpendiculaire à $a\alpha$ et ce perpendiculaire à $b\beta$; et si on rabat chacun d'eux autour de sa trace horizontale, leurs intersections avec les plans P, Q seront des droites cf, cg, respectivement inclinées sur cd, ce, des angles θ, ω. Actuellement, coupons les plans P, Q par un plan horizontal quelconque $x'y'$: les projections horizontales pm, qm des deux intersections se construiront très-aisément en considérant cd, ce comme *des lignes de terre* auxiliaires. Par suite, cm sera la projection horizontale de l'intersection des plans P, Q; et si nous menons cc', mm' perpendiculaire à la ligne de terre, nous obtiendrons $c'm'$ pour la projection verticale de cette même intersection. Fig. 105.

149. *Remarque.* Par la construction très-simple indiquée sur l'épure, on obtient les traces verticales $\alpha a'$, $b\beta'$ des plans P, Q; et comme on peut employer ces traces verticales pour déterminer l'intersection des deux plans, le problème comporte plusieurs vérifications.

PROBLÈME LXII.

Connaissant les traces horizontales de deux plans faisant entre eux un angle donné, ainsi que la projection horizontale de leur intersection, trouver les traces verticales.

Fig. 164. 150. Soient $b\alpha$, $b\beta$ les traces horizontales des deux plans, et ab la projection horizontale de leur intersection. Il résulte de ce que l'on a vu au numéro 90, que pour trouver les traces verticales des deux plans, il faut effectuer les constructions suivantes : 1° mener pq perpendiculaire à ab; 2° décrire sur pq un arc capable de l'angle donné θ, et joindre le point m, où cette ligne rencontre ab, aux points p et q; 3° décrire les arcs de cercle bs et hr du point a comme centre; 4° décrire du point r comme centre, avec $rk = hm$ pour rayon, un arc de cercle, et mener à cet arc une tangente ska', partant du point s et rencontrant en a' la perpendiculaire aa' à xy; 5° joindre le point a' aux points α, β où les traces horizontales des deux plans rencontrent la ligne de terre. Les droites $\alpha a'$, $\beta a'$ sont les traces verticales des deux plans.

151. *Discussion.* Lorsque le point s est situé hors de la circonférence décrite du point r comme centre avec hm pour rayon, on peut mener du point s deux tangentes à cette circonférence, et par conséquent le problème admet deux solutions.

Lorsque le point s est situé sur la circonférence, il n'y a qu'une solution.

Enfin, le problème est impossible lorsque le point s est situé dans l'intérieur de la circonférence.

PROBLÈME LXIII.

Connaissant la projection horizontale d'un angle trièdre tri-rectangle, trouver sa projection verticale.

152. Soit s la projection horizontale du sommet de l'angle trièdre, et soient sa, sb, sc les projections horizontales de ses trois arêtes. Si nous coupons les trois faces par un plan horizontal quelconque, les trois intersections seront projetées horizontalement suivant des droites perpendiculaires aux projections des arêtes correspondantes. Conséquemment, nous mènerons une droite quelconque bc perpendiculaire à sa; puis, des points b, c, nous abaisserons, sur sc, sb, les perpendiculaires ba, ca, *lesquelles se couperont sur as* (*); et ces trois droites bc, ba, ca, pourront être regardées comme les traces horizontales des trois faces de l'angle trièdre. Fig. 171.

Actuellement, supposons que l'une quelconque des faces de l'angle trièdre, la face Sab par exemple, tourne autour de sa trace horizontale ab, pour se rabattre sur le plan du triangle abc.

Le rabattement du sommet S devra se trouver sur le prolongement de la droite cs, perpendiculaire à ba. D'ailleurs, l'angle aSb est droit; donc ce même rabattement doit être situé sur la circonférence décrite sur ab comme diamètre; il sera donc en s'.

(*) Cette proposition, réciproque de ce théorème : *les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un même point*, se démontre très-aisément au moyen de la *réduction à l'absurde*.

Connaissant le rabattement du sommet S et sa projection horizontale s, il nous sera bien facile d'obtenir sa projection verticale s''. Le problème peut donc être regardé comme résolu.

PROBLÈME LXIV.

Trouver, sur un plan perpendiculaire à une droite donnée, le lieu des pieds de toutes les droites qui, partant d'un des points de la perpendiculaire, font avec elle un angle donné.

153. AB étant la droite donnée et O le point pris sur cette droite, cherchons le point C où la droite perce le plan donné P. Soit ensuite M un quelconque des points satisfaisant à la question. Si nous considérons le triangle MCO, évidemment rectangle en C, nous verrons que le côté OC est constant, et que l'angle aigu O est égal à l'angle donné θ. Conséquemment, le lieu géométrique cherché est une circonférence ayant pour centre le point C.

Il faudra donc, pour construire l'épure :

1° Chercher les deux projections et le rabattement du point C, situé dans le plan donné P; 2° construire la droite OC en véritable grandeur; 3° construire un triangle rectangle OCM, connaissant le côté OC de l'angle droit, et l'angle aigu C, égal à l'angle donné θ; 4° chercher les deux projections d'une circonférence située dans le plan P, connaissant son rayon CM et le rabattement de son centre.

PROBLÈME LXV.

Trouver une droite parallèle à une droite donnée et qui rencontre deux droites données.

154 Soient AB, CD, les deux droites sur lesquelles doit

s'appuyer la droite inconnue, laquelle doit être parallèle à une droite donnée EF.

Construisons deux plans parallèles à EF et passant, l'un par AB, l'autre par CD (Problème XIII). Cherchons ensuite l'intersection de ces deux plans : il est clair qu'elle sera la droite cherchée.

155. *Remarque.* Le problème de la plus courte distance entre deux droites est un cas particulier de celui-ci (73). Aussi, on peut modifier comme il suit la solution qui vient d'être indiquée, de manière à la rendre tout à fait semblable à celle du problème XXII :

Après avoir conduit, suivant AB, un plan P parallèle à EF, on cherche le point M où CD perce ce plan P. Si, par ce point M, on mène une parallèle à EF, on aura la droite demandée.

PROBLÈME LXVI.

Par un point donné, mener une droite qui fasse, avec deux droites données, des angles donnés.

156. Par le point donné O, menons des parallèles OA, OB, aux deux droites données, et soit OC une droite inconnue, qui fasse avec OA, OB, des angles respectivement égaux aux angles donnés : il est clair que cette droite OC satisfera à la question.

Or, les trois droites OA, OB, OC forment un angle trièdre dans lequel les deux arêtes OA, OB, sont données, et dans lequel on connaît, en outre, les deux faces COA, COB. Si les droites OA, OB étaient situées dans l'un des plans de projection, la question se réduirait au problème XXXI; mais, comme on suppose que les droites données ont des

positions quelconques, nous allons construire l'épure de la manière suivante.

Fig. 170. Soient (oa, $o'a'$) et (ob, $o'b'$) les parallèles aux droites données, menées par le point donné (o, o'). Faisons tourner ces droites autour de la verticale passant par ce point O, jusqu'à ce que chacune d'elles devienne parallèle au plan vertical : nous obtiendrons, pour leurs rabattements, $o'a''$ et $o'b''$. Menons les droites $o'c_1$, $o'c_2$, égales entre elles, et respectivement inclinées sur $o'a''$, $o'b''$, de quantités égales aux deux angles donnés. Les points c_1, c_2 pourront être regardés comme étant les rabattements d'un même point C de l'arête cherchée OC, l'un des rabattements étant effectué autour de OA, et l'autre autour de OB.

Par ce point inconnu C, imaginons deux plans, respectivement perpendiculaires à OA et à OB. Si nous pouvons déterminer ces deux plans, leur intersection contiendra le point C; et, comme ce point C est distant du point O d'une longueur égale à $o'c_1$, nous serons ramenés au problème XLII.

Si l'arête OA était parallèle à son rabattement $o'a''$, le premier des deux plans cherchés aurait pour traces $c_1\alpha$ perpendiculaire à $o'a''$, et $\alpha\beta$ perpendiculaire à la ligne de terre. Mais si nous supposons que la droite OA tourne autour de la verticale passant en O, de manière à reprendre sa position véritable, le plan perpendiculaire à cette droite se mouvra de telle sorte que sa trace horizontale restera à une distance constante de l'*axe de rotation*. Si donc, sur oa, nous prenons $o\beta' = o\beta$, et que nous menions $\beta'\alpha'$ perpendiculaire à oa, puis $\alpha'\nu'$ perpendiculaire à $o'a'$, le plan $\beta'\alpha'\nu'$ sera l'un des deux plans passant par le point inconnu C.

Une construction analogue donnera, pour le second plan,

$\delta\nu'\mu'$. L'intersection de ces deux plans est projetée suivant ef, $e'f'$.

Actuellement, par le point O et la droite EF, faisons passer un plan $\lambda\epsilon\varphi$, puis rabattons-le sur le plan vertical de projection. Nous trouverons, pour rabattement du point O, le point o'', et $e'f''$ pour rabattement de la droite EF (*). Si nous décrivons, du point o'' comme centre, avec un rayon égal à $o'c$, l'arc $c''d''$, il coupera la droite $e'f''$ en deux points c'', d'', lesquels sont les rabattements, l'un du point cherché C, et l'autre d'un point D, qui satisfait également à la question.

En revenant des rabattements aux projections, nous trouvons que le point C se projette en c, c', et que le point D a pour projections d, d'. La droite cherchée OC est donc, finalement, représentée par oc, $o'c'$; et il y a une seconde droite (od, $o'd'$), qui satisfait aussi au problème proposé.

PROBLÈME LXVII.

Mener une droite qui s'appuie sur deux droites données, non situées dans un même plan, et qui fasse, avec ces dernières, des angles respectivement égaux à des angles donnés.

157. Par un point quelconque O, menons des parallèles OA, OB aux deux droites données, et cherchons une droite OC qui fasse, avec OA, OB, des angles respectivement égaux aux angles donnés (problème LXVI) · il est clair que OC sera parallèle à la droite cherchée. Il suffira donc, pour résoudre le problème proposé, de mener une droite parallèle à OC, et qui rencontre les deux droites données. (Problème LXV).

(*) Sur l'épure, on a supprimé les constructions qui donnent ces deux rabattements.

PROBLÈME LXVIII.

Trouver les points de rencontre d'une droite et d'une sphère données.

Fig. 172. 158. Soient *ab*, *a'b'* les projections de la droite, et *o*, *o'* les projections du centre de la sphère. Si, de ces deux points pris comme centres, nous décrivons des circonférences ayant pour rayon le rayon de la sphère, ces deux lignes seront les projections des contours apparents de la surface, soit par rapport au plan horizontal, soit par rapport au plan vertical. Autrement dit, les deux circonférences *oc*, *o'c'* pourront être regardées comme étant *les deux projections* de la sphère.

Cela posé, pour déterminer les points où la droite AB perce la sphère, menons, suivant cette droite, un plan qui rencontre la sphère; et, pour plus de simplicité dans les constructions, choisissons l'un des plans projetants de la droite, par exemple, le plan vertical *ab*. L'intersection de ce plan auxiliaire et de la sphère sera une circonférence ayant pour diamètre la corde *ef*. Si donc nous pouvons construire les projections des points où cette circonférence est rencontrée par la droite AB, nous aurons résolu le problème proposé.

Afin de n'avoir pas à construire la projection verticale de la circonférence *ef*, projection qui serait une *ellipse*, faisons tourner le plan vertical *ef* autour de la verticale projetée en *o*, jusqu'à ce qu'il devienne parallèle au plan vertical de projection. Dans cette nouvelle position, la circonférence *gh* se projettera en vraie grandeur sur le plan vertical, suivant une circonférence ayant pour centre le point *o*. Quant à la droite AB, comme chacun de ses points a décrit

une circonférence ayant son centre sur l'axe de rotation, et qui se projette en vraie grandeur sur le plan horizontal, on obtiendra facilement sa nouvelle projection verticale $a''b''$.

Actuellement, la droite $a''b''$ coupe la circonférence $g'h'$ en deux points m'', n'', lesquels sont évidemment les *nouvelles* projections verticales des deux points cherchés. En remettant la droite AB dans sa position primitive, on obtient, pour projections de ces points, (m, m') et (n, n').

PROBLÈME LXIX.

Trouver le lieu des points de contact de toutes les tangentes menées, par un point donné, à une sphère donnée.

159. On démontre facilement que ce lieu est une circonférence de petit cercle, dont le plan est perpendiculaire à la droite qui joint le point donné au centre de la sphère donnée. Si donc on peut construire un seul de ces points de contact, on pourra déterminer le plan de la circonférence cherchée, puis le rabattement de cette ligne, et enfin ses deux projections. (Problème LXV).

Or, parmi tous les plans passant par le point donné O et par le centre C de la sphère, considérons celui qui est vertical. Nous pourrons le faire tourner autour de la verticale passant en C, jusqu'à ce qu'il devienne parallèle au plan vertical de projection. Soit alors O_1 la nouvelle position occupée par le point O. Si, de ce point O_1, nous menons des tangentes O_1A_1, O_1B_1 à la projection verticale de la sphère, la corde de contact A_1B_1 représentera le petit cercle cherché, après son mouvement de rotation. Il sera facile maintenant, en revenant aux positions primitives, de trouver les projections des points dont A_1 et B_1 Fig. 173.

étaient les rabattements, puis les traces du plan du petit cercle, etc.

PROBLÈME LXX.

Trouver l'intersection de deux sphères données.

160. Si le plan vertical passant par les centres des deux sphères était parallèle au plan vertical de projection, la circonférence suivant laquelle les deux sphères se coupent aurait évidemment pour projection verticale la corde commune aux projections verticales des deux sphères. Pour réduire le cas général du problème à ce cas particulier, on opérera comme ci-dessus, c'est-à-dire que, par exemple, on fera tourner la première sphère autour de la verticale passant par le centre de la seconde. Il sera facile alors de déterminer le plan de la ligne d'intersection des deux sphères, de façon que l'on sera ramené au problème qui précède.

NOTE.

On a vu, dans la solution du problème XLV, que la projection d'une circonférence, sur un plan, est une courbe nommée *ellipse*. Nous allons indiquer quelques propriétés de cette ligne, résultant de la définition qui vient d'être rappelée.

1. Lemme. *Les distances de la trace d'un plan à un point quelconque* M *situé dans ce plan, et à la projection* m *de* M, *sont dans un rapport constant.* FIG. 174.

Soient P un plan, $\alpha\beta$ sa trace sur l'un des plans de projection, par exemple, sur le plan horizontal, et soit M un point situé dans le plan P. Si, par la projection horizontale m de M, nous abaissons mn perpendiculaire à $\alpha\beta$, et que nous menions Mn, cette dernière droite sera, d'après un théorème connu, perpendiculaire à $\alpha\beta$. Donc l'angle $mn\mathrm{M} = \theta$ mesure l'inclinaison du plan P sur le plan horizontal. D'ailleurs, le triangle mn, rectangle en m, donne

$$\frac{mn}{\mathrm{M}n} = \cos.\ \theta = \text{constante}.$$

2. *Description de l'ellipse au moyen du cercle.*

Soient une circonférence ABCD et une droite $\alpha\beta$, situées dans un même plan. Si, par un point quelconque M de la circonférence, on abaisse sur $\alpha\beta$ la perpendiculaire Mn, et que l'on prenne sur cette droite une distance mn égale à Mn cos. θ, le lieu des points m sera une ellipse égale à celle que l'on obtiendrait en projetant la circonférence AB sur un plan incliné d'un angle θ sur le plan de cette circonférence. FIG. 175.

Cette *génération* de l'ellipse résulte immédiatement du lemme qui précède : nous savons, en effet, que si le lieu du point M (fig. 174) est une circonférence, le lieu du point m est une ellipse.

3. Pour plus de simplicité, on peut supposer que le plan de projection passe par le centre de la circonférence; ou, ce qui est la même chose, que la droite $\alpha\beta$ (fig. 174) soit confondue avec le diamètre AB. Alors ce diamètre AB devient un *axe de symétrie*, ou simplement un *axe* de l'ellipse (fig. 176). Cette courbe a un second

axe, dirigé suivant le diamètre CD, perpendiculaire à AB. Il est clair, en effet, que la figure est symétrique par rapport à CD.

Les longueurs AB et *cd* sont, respectivement, le *grand axe* et le *petit axe*.

FIG. 176. 4. Prenons, dans le cercle, deux points M, E, diamétralement opposés, et construisons les points correspondants *m*, *e* de l'ellipse. Il est facile de voir que les deux triangles rectangles *epo*, *mno* sont égaux; d'où résulte que les trois points *e*, *o*, *m* sont en ligne droite, et que $eo = mo$. Ainsi, le centre *o* du cercle *est un centre de symétrie*, ou simplement *le centre* de l'ellipse.

5. *Les* RAYONS *menés du centre aux différents points de l'ellipse vont en diminuant du* SOMMET B *au* SOMMET *c*; de façon que le *demi-grand axe* oB est le plus grand rayon, et que le demi-axe *oc* est le plus petit.

FIG. 177. En effet, il est facile de reconnaître que, dans l'espace, les deux rayons OM et *om* sont l'hypoténuse et le premier côté de l'angle droit d'un triangle rectangle; l'autre côté de l'angle droit étant la droite M*m* qui joint le point M avec la projection *m*. Or, lorsque le point M se rapproche du point C de la circonférence ACB, le côté M*m* va en augmentant; d'ailleurs *o*M a une longueur constante; donc O*m* diminue.

6. Les considérations que nous venons d'employer permettent encore de démontrer, avec la plus grande facilité, les propriétés suivantes de l'ellipse :

1° Le lieu des milieux d'une série de cordes parallèles entre elles, c'est-à-dire le *diamètre* de ces cordes, est une droite passant par le centre;

2° L'ellipse a une infinité de systèmes de diamètres *conjugués*, c'est-à-dire tels, que chacun d'eux divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre;

3° L'aire de l'ellipse est à celle du cercle décrit sur le grand axe comme diamètre, dans le rapport du petit axe au grand axe;

Etc.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I.

But de la Géométrie descriptive.— Propriétés relatives aux projections des points et des lignes, et aux traces des plans.

	Pages.
But de la géométrie descriptive.	1
Méthode des projections.	2
Projection d'un point, projection d'une ligne.	2
La projection d'une droite est une ligne droite.	3
Relation entre les deux projections d'un même point.	4
Une droite est généralement déterminée, quand on connaît ses projections sur deux plans qui se coupent.	5
Les projections d'une courbe quelconque, faites sur deux plans qui se coupent, déterminent généralement cette courbe.	6
Quand les deux traces d'un plan sont données, la position de ce plan est entièrement déterminée.	7
Choix de deux plans rectangulaires pour plans de projection.	8
Conséquences qui résultent de ce choix.	9
Après le rabattement du plan vertical sur le plan horizontal, les deux projections d'un même point sont situées sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.	11
Condition nécessaire et suffisante pour que deux lignes se coupent dans l'espace.	12
Lorsque deux droites sont parallèles, leurs projections sur un même plan sont parallèles.	12
Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, les projections de la droite sont respectivement perpendiculaires aux traces du plan. Réciproque.	14
Conventions relatives au mode de représentation des différentes parties qui constituent les figures.	15

CHAPITRE II.

Intersections des droites et des plans. — Droites et plans déterminés par diverses conditions.

Pages.

PROBLÈME I. Connaissant les projections d'une droite, trouver ses traces. 18

PROBLÈME II. Connaissant les deux traces d'une droite, trouver ses deux projections. 22

PROBLÈME III. Connaissant les projections de deux points, trouver les projections et la vraie grandeur de la droite qui joint ces deux points. 22

PROBLÈME IV. Trouver, sur une droite donnée, un point qui soit à une distance donnée d'un point donné sur cette droite. 25

PROBLÈME V. Connaissant les traces de deux plans, construire les projections de leur intersection. 26

PROBLÈME VI. Déterminer le point d'intersection de trois plans donnés. 34

PROBLÈME VII. Trouver l'intersection d'une droite et d'un plan. 36

PROBLÈME VIII. Par un point donné, mener une parallèle à une droite donnée. 44

PROBLÈME IX. Connaissant l'une des projections d'une droite située dans un plan donné, trouver l'autre projection de cette droite. 45

PROBLÈME X. Faire passer un plan par trois points donnés. 46

PROBLÈME XI. Faire passer un plan par deux droites qui se coupent, ou par deux droites parallèles. 47

PROBLÈME XII. Par un point donné et par une droite donnée, faire passer un plan. 49

PROBLÈME XIII. Par une droite donnée, faire passer un plan parallèle à une droite donnée. 49

PROBLÈME XIV. Par un point donné, mener un plan parallèle à deux droites données. 50

PROBLÈME XV. Mener, par un point donné, une droite qui rencontre deux droites données. 50

Pages.

PROBLÈME XVI. Par un point donné, mener un plan parallèle à un plan donné. 51

CHAPITRE III.

Droites et plans perpendiculaires.

PROBLÈME XVII. Abaisser, d'un point donné, une perpendiculaire sur un plan donné, et déterminer ensuite le pied et la véritable grandeur de cette perpendiculaire. 55

PROBLÈME XVIII. Mener, par un point donné, un plan perpendiculaire à une droite donnée. 58

PROBLÈME XIX. Construire la plus courte distance d'un point donné à une droite donnée. 60

PROBLÈME XX. Par une droite donnée, faire passer un plan perpendiculaire à un plan donné. 62

PROBLÈME XXI. Par un point donné, mener un plan perpendiculaire à deux plans donnés. 62

PROBLÈME XXII. Construire la plus courte distance entre deux droites données, non situées dans un même plan. 62

CHAPITRE IV.

Angles formés par des droites et des plans.

PROBLÈME XXIII. Trouver les angles que fait une droite avec les plans de projection. 66

PROBLÈME XXIV. Construire les angles que forme un plan avec les plans de projection. 68

PROBLÈME XXV. Construire l'angle formé dans l'espace par les traces d'un plan donné. 69

PROBLÈME XXVI. Construire l'angle de deux droites dont on connaît les projections. 71

PROBLÈME XXVII. Construire la bissectrice de l'angle formé par deux droites données. 75

PROBLÈME XXVIII. Construire l'angle d'une droite et d'un plan donnés. 75

PROBLÈME XXIX. Construire l'angle de deux plans donnés. 78

Pages.

PROBLÈME XXX. Construire le plan bissecteur de l'angle formé par deux plans donnés. 85

CHAPITRE V.

Résolution de l'angle trièdre. — Réduction à l'horizon. — Sphère inscrite. — Sphère circonscrite.

PROBLÈME XXXI. Connaissant les trois faces d'un angle trièdre, trouver les trois angles dièdres. 87

PROBLÈME XXXII. Connaissant deux faces d'un angle trièdre, et l'angle dièdre compris, trouver la troisième face et les deux autres angles dièdres. 90

PROBLÈME XXXIII. Connaissant deux faces d'un angle trièdre, et l'angle dièdre opposé à l'une d'elles, trouver la troisième face et les deux autres angles dièdres. 91

PROBLÈME XXXIV. Réduire à l'horizon l'angle de deux droites. 93

PROBLÈME XXXV. Circonscrire une sphère à une pyramide triangulaire. 95

PROBLÈME XXXVI. Inscrire une sphère dans une pyramide triangulaire. 97

PROBLÈME XXXVII. Construire une sphère tangente aux quatre faces d'un tétraèdre. 99

CHAPITRE VI.

Exercices.

PROBLÈME XXXVIII. Connaissant l'une des projections d'un point situé dans un plan donné, trouver la position qu'occupe ce point, lorsqu'on rabat, sur le plan horizontal, le plan donné. 108

PROBLÈME XXXIX. Connaissant le rabattement d'un point situé dans un plan donné, construire les deux projections de ce point. 109

PROBLÈME XL. Connaissant l'une des projections d'une droite située dans un plan donné, trouver le rabattement de cette droite. 110

Pages.

Problème XLI. Connaissant le rabattement d'une droite située dans un plan donné, construire les deux projections de cette droite. 110

Problème XLII. Trouver, sur une droite donnée, un point dont la distance à un point donné soit égale à une longueur donnée. 111

Problème XLIII. Mener à une droite donnée, située dans un plan donné, une parallèle qui en soit distante d'une longueur donnée. 111

Problème XLIV. Mener un plan parallèle à un plan donné, et qui en soit distant d'une longueur donnée. 112

Problème XLV. Trouver les projections d'une circonférence passant par trois points donnés. 112

Problème XLVI. Par un point donné, mener une droite qui fasse, avec la ligne de terre, des angles donnés. 114

Problème XLVII. Par un point donné, mener une droite qui coupe, sous un angle donné, une droite donnée. 114

Problème XLVIII. Connaissant la projection verticale d'une droite, un de ses points, et l'angle qu'elle fait avec le plan horizontal, construire sa projection horizontale. 115

Problème XLIX. Par un point donné, mener une droite qui fasse avec le plan horizontal un angle donné, et qui rencontre une droite donnée, située dans ce plan. 115

Problème L. Par un point donné, mener une droite qui fasse, avec un plan donné, un angle donné, et qui rencontre une droite donnée, située dans ce plan. 116

Problème LI. Par un point donné, mener une droite qui fasse, avec un plan donné, un angle donné, et qui rencontre une droite donnée. 117

Problème LII. Par un point donné, mener une droite qui fasse, avec les plans de projection, des angles donnés. 118

Problème LIII. Étant données les projections horizontales et les traces horizontales de deux droites, avec l'angle de ces droites, trouver leurs projections verticales. 119

Problème LIV. Construire un plan, connaissant sa trace hori-

Pages.

zontale et l'angle qu'il fait avec le plan horizontal de projection. 120

Problème LV. Construire un plan, connaissant sa trace horizontale et l'angle qu'il fait avec le plan vertical de projection. 120

Problème LVI. Par une droite donnée, faire passer un plan qui fasse, avec le plan horizontal, un angle donné. 121

Problème LVII. Étant donnés un plan et une droite située dans ce plan, mener par cette droite un second plan qui fasse, avec le premier, un angle donné. 122

Problème LVIII. Par un point donné, faire passer un plan qui fasse, avec les deux plans de projection, des angles donnés. 123

Problème LIX. Par un point donné, faire passer un plan perpendiculaire à un plan donné, et qui fasse, avec le plan horizontal, un angle donné. 124

Problème LX. Étant donnée la projection horizontale d'une droite perpendiculaire à une droite donnée en un point donné, trouver sa projection verticale. 124

Problème LXI. Trouver l'intersection de deux plans, donnés par leurs traces horizontales et les angles qu'ils font avec le plan horizontal de projection. 125

Problème LXII. Connaissant les traces horizontales de deux plans faisant entre eux un angle donné, ainsi que la projection horizontale de leur intersection, trouver les traces verticales. 126

Problème LXIII. Connaissant la projection horizontale d'un angle trièdre tri-rectangle, trouver sa projection verticale. 127

Problème LXIV. Trouver, sur un plan perpendiculaire à une droite donnée, le lieu des pieds de toutes les droites qui, partant d'un des points de la perpendiculaire, font avec elle un angle donné. 128

Problème LXV. Trouver une droite parallèle à une droite donnée et qui rencontre deux droites données. 128

Problème LXVI. Par un point donné, mener une droite qui fasse, avec deux droites données, deux angles donnés. 129

Problème LXVII. Mener une droite qui s'appuie sur deux

Pages.

droites non situées dans un même plan, et qui fasse avec ces dernières des angles respectivement égaux à des angles donnés. 131

PROBLÈME LXVIII. Trouver les points de rencontre d'une droite et d'une sphère données. 132

PROBLÈME LXIX. Trouver le lieu des points de contact de toutes les tangentes menées, d'un point donné, à une sphère donnée. 133

PROBLÈME LXX. Trouver l'intersection de deux sphères données. 134

Note. 135

FIN DE LA TABLE.

Imprimerie de HENNUYER et Cᵉ, rue Lemercier, 24. Batignolles.

ERRATA.

—

Page 4, ligne 12, au lieu de : SI L'HYPERBOLE GÉNÉRATRICE EST ÉQUILATÈRE, lisez : *si l'hyperbole génératrice est semblable à l'hyperbole directrice.*

Page 8, dernière ligne, au lieu de : A NOUS EN, lisez : *à nous en occuper.*

AVANT-PROPOS.

J'ai publié, il y a deux ans, en gardant l'anonyme, une seconde édition du *Traité élémentaire de Géométrie descriptive, par M. H.-Ch. de La Frémoire*. Cette réimpression, fort différente de l'ouvrage original, ne renferme cependant, comme celui-ci, que les Problèmes relatifs à la Ligne droite et au Plan; elle ne satisfait donc pas aux exigences du dernier Programme pour l'admission à l'École Polytechnique. Afin de combler une lacune fâcheuse, et pour mettre les jeunes candidats en état de répondre à toutes les questions qui peuvent leur être adressées dans les examens, j'ai rédigé la *Seconde Partie* qui paraît aujourd'hui.

En commençant cet ouvrage, je m'étais proposé d'être concis, clair et rigoureux. Un simple coup d'œil, jeté sur la table des matières, montrera qu'en un petit nombre de pages j'ai renfermé

[illegible] ème; je pense [illegible] e partie de ma [illegible] é aussi heureux [illegible] la clarté.

[illegible]TIVE

[illegible]oit par une [illegible] restant pa- [illegible]droite assu- [illegible]oite, en un

[illegible] que prend [illegible] diamètre,

[illegible]urne autour [illegible]elle, la sur- [illegible]n ou d'un

Cette manière de considérer le plan, la sphère, le cylindre et le cône, étendue à toutes les surfaces, conduit à la définition suivante :

Une surface est le lieu des positions que prend une ligne qui change de situation, et même de forme, d'après une loi déterminée et continue.

Pour éclaircir cette définition, nous prendrons quelques exemples.

Fig. 1. 2. Si une droite DE se meut en s'appuyant constamment sur une ligne fixe ABC, et en restant parallèle à une droite donnée MN, le lieu de ses positions sera ce qu'on appelle une *surface cylindrique*.

La droite mobile, qui *engendre* la surface, se nomme *génératrice;* ainsi DE, D'E', D''E''... sont différentes positions de la génératrice. La ligne fixe ABC, qui règle le mouvement de la génératrice, est appelée *directrice*.

Si cette directrice est rectiligne, la surface cylindrique se réduit à un plan.

Fig. 2. 3. *Une surface conique* est celle qui est engendrée par une droite assujettie à s'appuyer sur une ligne fixe ABC, et à passer par un point fixe O. Chacune des génératrices DO, D'O, D''O... pouvant être prolongée indéfiniment, de part et d'autre du point O, la surface est formée de deux parties, ou *nappes*. Le *point directeur* O, où ces nappes se réunissent, est appelé *centre* de la surface conique.

Fig. 3. 4. Soient une droite fixe XY et une ligne quelconque ABC. Menons, de différents points A, B, C,... de cette ligne, des perpendiculaires AA', BB', CC',... sur XY. Si nous faisons tourner le système AA'BB'CC'... autour de XY, chacun des points A, B, C... décrira une circonférence qui aura pour centre le pied de la perpendiculaire corres-

pendante, et dont le plan sera perpendiculaire à XY ; et la ligne ABC engendrera une *surface de révolution*.

Les circonférences décrites par les différents points de la génératrice ABC sont appelées *parallèles* de la surface, parce que leurs plans sont parallèles entre eux. La section MNP, faite par un plan passant suivant l'*axe de rotation* XY, est un *méridien*.

Il résulte, de la définition de la surface, que *tous les méridiens sont égaux entre eux*.

5. Prenons pour directrice une ellipse ABA'B', et pour génératrice une ellipse CDC'D'. Si cette dernière courbe, supposée *toujours semblable à elle-même*, se meut de manière que son plan reste perpendiculaire à l'axe AA' de l'ellipse directrice, et que ses sommets C, C' parcourent celle-ci, la surface engendrée par cette génératrice *variable de grandeur*, surface évidemment fermée de toutes parts, sera ce qu'on appelle un *ellipsoïde*. Cette dénomination est fondée sur ce que la section faite dans la surface, par un plan quelconque, est une ellipse. Fig. 4.

6. *Remarque*. Si l'ellipse génératrice se change en cercle, la surface engendrée, au lieu d'être un *ellipsoïde à trois axes inégaux*, sera un *ellipsoïde de révolution*. Si, de plus, l'ellipse directrice se réduit aussi à une circonférence, la surface engendrée se réduira elle-même à une sphère.

7. Remplaçons l'ellipse directrice de l'exemple précédent par une hyperbole EBFE'B F', et ne changeons rien aux autres conditions. La surface engendrée sera, évidemment, indéfinie, et *sans solution de continuité*. On la nomme *hyperboloïde à une nappe*. Fig. 5.

8. *Remarque*. L'hyperboloïde à une nappe sera de ré-

volution, si l'ellipse génératrice se transforme en circonférence.

Fig. 6. 9. Adoptons encore, pour directrice, une hyperbole EBFE'B'F'. Prenons ensuite, pour génératrice, une hyperbole DCGD'C'G', toujours semblable à elle-même, ayant son plan perpendiculaire à l'axe non transverse de l'autre hyperbole, et dont les sommets C, C' parcourent celle-ci. La surface qui résultera de ce mode de génération sera composée de deux parties séparées et indéfinies. Pour la distinguer de la surface que nous venons de considérer, on lui a donné le nom d'*hyperboloïde à deux nappes*.

10. *Remarque*. Si l'hyperbole génératrice est équilatère, la surface sera un *hyperboloïde de révolution, à deux nappes*.

Fig. 7. 11. Soient une parabole fixe ABC, et une parabole mobile DED'. Supposons que ces deux courbes aient leurs axes BG, EH parallèles et de *même sens*, et leurs plans perpendiculaires entre eux. Supposons, en outre, que la seconde courbe se meuve de manière que son sommet E parcoure la première. Nous obtiendrons ainsi une surface continue, indéfinie, et située tout entière d'un même côté du plan mené par le sommet de la parabole fixe, perpendiculairement à l'axe de celle-ci. On démontre facilement, à l'aide du calcul, que les sections planes de cette surface sont des paraboles ou des ellipses : pour cette raison, on l'a nommée *paraboloïde elliptique*.

12. *Remarque*. La surface serait de révolution si les paraboles qui la déterminent étaient égales.

Fig. 8. 13. Si la parabole mobile a encore son axe EH parallèle à celui de la parabole fixe, mais que ces deux droites soient dirigées en *sens contraires*, la surface engendrée

[illegible] elle se com-
[illegible] indéfiniment
[illegible] de la direc-
[illegible] un plan, que
[illegible] *paraboloïde*
[illegible] définir con-
[illegible] *econd ordre.*
[illegible] les n'admet-
[illegible] econd ordre,
[illegible] équation du
[illegible] ment à une
[illegible] surfaces fort
[illegible] Pierres, par
[illegible] re celles qu
[illegible] *ile* ou d'une
[illegible] deux séries,
[illegible] *ces gauches.*
[illegible] ettre de pré-
[illegible] nations.
[illegible] dont trois Fig. 9.
[illegible] ns un même
[illegible] ns le même
[illegible] ons une sur-
[illegible] gles B'BC',
[illegible] tour de son
[illegible] ec le prolon-
[illegible] coïncidence

aura été établie, faisons tourner l'ensemble des deux angles H'HI', G'GH', autour de GG', jusqu'à ce que la figure G'GHI' soit venue se rabattre sur le prolongement du plan G'FF'. En continuant de la sorte, nous aurons enfin amené dans le plan B'BC', et les unes à la suite des autres, les diverses parties de la surface polyédrale. De plus, la figure plane résultant de ces rabattements successifs, ne présentera ni *déchirure* ni *duplicature;* en sorte que, si l'on *taillait un patron* qui lui fût égal, on pourrait, à l'aide de ce patron, reconstruire la surface primitive. Pour cette raison, la figure plane est dite le *développement* de cette surface.

Fig. 10. 17. Soit actuellement une courbe MNP, dont aucun arc ne puisse être contenu dans un plan, c'est-à-dire une *courbe à double courbure.* Le lieu des tangentes A*a*, B*b*, C*c*..., à cette ligne, sera une certaine surface réglée S. D'un autre côté, si nous imaginons les cordes AB, BC... indéfiniment prolongées, nous obtiendrons, comme tout à l'heure, une surface polyédrale S' ayant pour arêtes ces dernières droites. Or, plus ces cordes seront petites, et plus leurs prolongements tendront à se confondre avec les tangentes menées par leurs extrémités; en sorte que la *forme* de la surface polyédrale S' différera, de moins en moins, de la forme de la surface S. Celle-ci est donc la *limite* dont s'approche sans cesse l'autre surface, lorsque les cordes AB, BC... diminuent indéfiniment.

D'un autre côté, on conçoit (et l'on peut démontrer rigoureusement) que les développements successifs D' des surfaces polyédrales telles que S', tendent eux-mêmes vers une certaine limite D.

D'après ces considérations, la surface réglée S, limite

des surfaces polyédrales développables S', est dite *développable*; et la figure plane D en est le *développement*.

18. Supposons maintenant qu'une droite se meuve suivant une loi continue, mais arbitraire, de manière à engendrer une surface réglée S. Soient AB, A'B', A''B'',... des positions de la génératrice, aussi rapprochées que nous le voudrons. En général, les droites AB, A'B' ne seront pas situées dans un même plan; elles auront donc une perpendiculaire commune, laquelle sera *unique*. Fig. 11.

Si la droite A'B' se rapproche indéfiniment de AB, le point où cette dernière ligne est rencontrée par la perpendiculaire commune tendra sans cesse vers une position limite P. De même, si la droite A''B'' se rapproche indéfiniment de A'B' (après que celle-ci aura repris sa position primitive), le pied de la perpendiculaire commune à ces deux lignes tendra vers une position limite P'. Nous aurons donc, sur les génératrices de la surface S, des points P, P', P''..., dont le lieu géométrique sera une certaine ligne L.

Cela posé, si la ligne L *touche* toutes les génératrices, la surface S sera le lieu des tangentes à cette ligne; elle sera donc *développable*. Si, au contraire, le lieu des points P *coupe* les génératrices, on dira que la surface S est *gauche*.

19. En résumé, nous adopterons les définitions suivantes :

Une surface développable est le lieu des tangentes à une courbe à double courbure;

Une surface gauche est une surface réglée, non développable.

20. La première définition ne renferme ni les surfaces

cylindriques, ni les surfaces coniques, lesquelles sont évidemment développables, comme étant les limites de surfaces prismatiques ou de surfaces pyramidales. Mais, pour les cylindres, le lieu des points P est indéterminé; et, pour les cônes, il se réduit à un point. On peut donc regarder ces deux sortes de surfaces comme des *cas singuliers* des surfaces développables (*).

(*) D'après les meilleurs auteurs, *une surface développable est le lieu engendré par une droite qui se meut de telle sorte que toujours deux positions consécutives se trouvent dans un même plan.* (*Traité de Géométrie descriptive de Leroy*, page 85.) Cette définition, qui fait image, et qui permet d'éviter des circonlocutions, n'est malheureusement pas exacte. Il est évident, en effet, que les tangentes menées aux extrémités d'un arc à double courbure ne sont généralement pas dans un même plan, et cela, quel que soit le degré de petitesse de cet arc.

En adoptant cette définition, les auteurs dont je parle se sont laissé guider, peut-être à leur insu, par la propriété caractéristique suivante : *la plus courte distance entre deux génératrices très-voisines d'une surface développable, peut être rendue aussi petite que l'on voudra, par rapport à l'angle de ces génératrices.* En d'autres termes, *si δ est la plus courte distanc entre deux génératrices d'une surface réglée* S (*non cylindrique*), *et que ε soit l'angle de ces deux droites, la surface* S *sera développable si la quantité $\frac{\delta}{\varepsilon}$ a pour limite zéro ; et si cette quantité a une limite différente de zéro, la surface sera gauche.* C'est là ce qu'exprime d'une manière abrégée, mais inexacte, l'énoncé que nous venons de citer.

Le lecteur peut, du reste, s'assurer que la définition employée dans le texte est la traduction, en langage géométrique, de celle que fournit la considération de la quantité $\frac{\delta}{\varepsilon}$.

Quant aux *théories*, soi-disant *géométriques*, à l'aide desquelles on arrive aux conclusions suivantes : *deux points sont infiniment voisins, si l'on ne peut supposer qu'un troisième point puisse être placé entre eux ; une tangente est une droite qui a, rigoureusement et géométriquement parlant, deux points communs avec la courbe, etc.;* nous n'avons pas à nous en

21. Le lieu des points P, P′, P″..., considéré ci dessus, se nomme *arête de rebroussement*, ou *ligne de striction*, suivant qu'il s'agit d'une surface développable ou d'une surface gauche.

22. Avant de terminer ces généralités, observons qu'*une surface admet toujours plusieurs modes de génération*. Afin de rendre cette proposition plus évidente, vérifions-la d'abord sur les surfaces considérées précédemment.

1° En premier lieu, si l'on coupe un cylindre par des plans parallèles, on reconnaît aisément que les sections obtenues seront égales entre elles. Une surface cylindrique est donc *le lieu des positions d'une courbe* ABC *qui se meut* Fig. 12. *de manière que, trois de ses points décrivant des droites parallèles, chacune des cordes* AB, BC, AC, *qui joignent ces points deux à deux, reste toujours parallèle à elle-même.*

2° Les sections faites dans une surface conique, par des plans parallèles, sont des courbes semblables, ayant pour *centre de similitude* le sommet du cône. D'après cette remarque, *si une courbe* ABC, *de grandeur variable, mais de* Fig. 13. *forme constante, se meut de manière que, trois de ses points décrivant des droites concourantes* SA, SB, SC, *chacune des cordes* AB, BC, AC *qui joignent ces points deux à deux, reste toujours parallèle à elle-même, cette courbe engendrera une surface conique.*

3° Les parallèles d'une surface de révolution peuvent être regardés comme étant des positions différentes de l'un d'eux, supposé mobile et de grandeur variable. *Si* donc *une circonférence, assujettie à s'appuyer sur une ligne donnée, se meut de manière que son centre décrive une droite donnée.*

et que son plan soit toujours perpendiculaire à cette droite, elle engendrera une surface de révolution, qui aura pour axe la droite donnée.

4° Généralement, *si l'on conçoit qu'une surface donnée* S, *engendrée d'une manière quelconque, soit coupée suivant des lignes* L, L′, L″..., *par une surface* Σ, *variant d'après une loi continue, on pourra regarder la première surface* S *comme le lieu géométrique de ces lignes, lesquelles en seront des génératrices.*

23. Les considérations précédentes s'appliquent très-utilement à la *représentation graphique* des surfaces. Au lieu de projeter des points pris sur la surface donnée, ou même de projeter des courbes tracées arbitrairement sur celle-ci, ce qui n'apprendrait presque rien quant à sa forme, on construit les projections d'un certain nombre de ses génératrices. Souvent même, si la surface admet deux modes de génération faciles à formuler géométriquement, on emploie, à la fois, des génératrices de chacun des deux systèmes. On conçoit, par exemple, qu'une surface de révolution serait clairement représentée si l'on pouvait *dessiner* les projections de quelques-uns de ses méridiens et de quelques-uns de ses parallèles.

24. La représentation graphique d'une surface serait cependant incomplète si, aux projections de génératrices convenablement choisies, on n'ajoutait les *traces* de cette surface, c'est-à-dire ses intersections avec les plans de projection. Enfin, pour indiquer encore plus nettement la forme du corps que l'on veut représenter, on construit, lorsqu'il est possible, les *projections des contours apparents* de ce corps, c'est-à-dire les limites dans l'intérieur desquelles

[illegible] cette dernière [illegible] *plans tan-* [illegible] à l'un des [illegible] à développer [illegible]

CHAPITRE II.

Généralités sur les plans tangents.

25. On sait que l'on appelle *tangente* à une courbe AB
Fig. 14. *la limite* MT *des positions d'une sécante* MS *qui tourne autour de l'un* M *de ses deux points d'intersection avec la courbe, ce point étant supposé fixe, jusqu'à ce que l'autre point* M′ *vienne se confondre avec le premier.*

26. Pour généraliser cette considération, supposons
Fig. 15. que, par un point M pris sur une surface quelconque S, on fasse passer deux courbes MA, MB, tracées arbitrairement sur celle-ci. Par le point M et par deux points A, B pris sur ces deux courbes, et aussi voisins de M que nous le voudrons, faisons passer un plan P. Il coupera la surface suivant une ligne dont un arc MC passera par le point M, et dont un second arc passera, en général, par les points A, B.

Menons maintenant la tangente MT à l'arc MC, et faisons tourner le plan P autour de cette droite, de manière que les arcs A′B′, A″B″... des courbes suivant lesquelles il coupe la surface, s'approchent indéfiniment du point M. Il est clair que le plan P tendra vers une certaine position limite P′, qu'il atteindra, soit quand la courbe MCAB se réduira au point M, soit quand le second arc de cette courbe se confondra avec celui qui passe en M (*).

(*) Afin de compléter notre démonstration, nous emprunterons, à la belle théorie des *Indicatrices*, les résultats suivants :

Si l'on prend, sur une surface S, trois points M, A, B, non en ligne

Le *plan limite* P′, ainsi obtenu, est dit *tangent* à la surface, au point M.

27. Le plan tangent, tel qu'il vient d'être défini, jouit d'une propriété fort importante, laquelle est souvent prise comme définition. Cette propriété consiste en ce que *les tangentes en un point* M, *à toutes les courbes menées par ce point sur la surface, sont situées dans le plan tangent en ce même point.*

Pour démontrer ce théorème, il suffit, évidemment, de faire voir que les tangentes MR′, MS′ aux deux courbes arbitraires MA, MB sont, avec la tangente MT, dans un seul et même plan.

Or, quand le plan variable P tourne autour de la tangente MT, en s'approchant du plan tangent P′, les sécantes MAR, MBS tournent autour du point M, en s'approchant elles-mêmes des tangentes MR′, MS′. De plus, à l'instant où les plans P, P′ se confondent, les points A, B coïncident avec le point M; donc, à ce même instant, les deux sécantes, qui n'ont pas cessé d'être situées dans le plan P, atteignent leurs positions limites MR′, MS′. Donc ces deux dernières

---

droite, et dont les distances mutuelles soient suffisamment petites, la section faite dans la surface par le plan P de ces trois points différera très-peu d'une *ellipse*, d'une *hyperbole* ou d'une *parabole*, du moins dans sa partie voisine des trois points.

Dans le premier cas, la surface est dite *convexe* autour de M, et la courbe MCAB a pour limite ce *point*.

Dans le second, la surface est *non convexe*, ou à *courbures opposées*; et la limite de la courbe *hyperbolique* est une *ligne* passant en M.

Enfin, dans le troisième cas, qui est intermédiaire entre les deux autres, la surface est *développable*. En même temps, l'arc *parabolique* a pour limite une *droite*.

Voyez, sur ce sujet, les *Compléments de Géométrie de M. Dupin*, l'*Analyse de M. Leroy*, etc.

droites sont dans le plan P′. C'est ce qu'il fallait démontrer.

28. La démonstration précédente suppose que le plan MAB coupe la surface suivant un arc *continu* joignant le point A au point B, et ne contenant pas le point M. Conséquemment, lorsque le contraire arrivera, un examen spécial pourra seul décider si les tangentes en M à toutes les courbes tracées sur la surface sont ou ne sont pas dans un même plan.

29. Considérons, par exemple, le sommet M d'un cône
Fig. 16. MPQR. Prenons, pour les deux lignes MA, MB, deux génératrices. Le plan P qui les contiendra n'aura que ces deux droites en commun avec la surface. Par suite, la courbe MC se réduira au point M, et l'arc AB n'existera pas. Donc, quand nous ferons tourner le plan P autour de la droite MT menée arbitrairement par le sommet, dans le plan AMB, nous verrons que ce plan tendra vers une position limite TMD, qui ne contiendra pas, *à la fois*, les deux *tangentes* MA, MB.

Il résulte de là que, par le sommet d'un cône, on peut mener une *infinité* de plans tangents à cette surface, et que les tangentes aux courbes menées de ce sommet, au lieu d'être situées dans un même plan, sont des génératrices. Le sommet d'un cône échappe donc au théorème général énoncé ci-dessus. Mais on voit clairement à quoi tient cette exception.

30. Le même cas exceptionnel se rencontre dans la surface engendrée par une courbe tournant autour d'une tangente ou d'une corde : pour le point commun à la génératrice et à l'axe de rotation, les tangentes se confondent avec l'axe, ou bien elles forment un cône de révolution.

31. On peut citer encore, comme exemples de surfaces

pour lesquelles le théorème général est en défaut, celles qui ont la forme d'une *pointe* ou d'une *corne*, et peut-être quelques autres. Mais, ainsi qu'on a pu le reconnaître dans la discussion relative au sommet d'un cône, ces exceptions au théorème n'empêchent pas que la démonstration donnée ci-dessus soit rigoureuse; car si elles se présentent, c'est seulement dans les cas, très-particuliers, où l'on ne pourrait plus adopter l'hypothèse sur laquelle cette démonstration est basée.

32. En revenant au cas le plus ordinaire, celui où les tangentes à toutes les courbes menées par le point donné sont contenues dans un même plan, il importe d'observer que celui-ci peut, de trois manières différentes, être tangent à la surface.

1° Si la courbe dont MC et AB sont deux arcs (n° 26) se réduit au point M quand le plan sécant P a atteint sa position limite P′, ce plan P′ n'a, dans les environs du point M, que ce seul point en commun avec la surface : il ne fait donc que *toucher* celle-ci. En d'autres termes, la petite zone dont M est le centre est située tout entière d'un même côté de P′. On dit, dans ce cas, que la surface considérée est *convexe*, tout autour du point M. (26, note.) Fig. 15.

2° Il peut arriver que la limite commune des arcs AB, MC soit une courbe telle, qu'en chacun de ses points, le plan tangent à la surface soit précisément le plan P′. Alors celui-ci, au lieu de toucher la surface en un seul point, a, avec elle, une *ligne de contact*. On a un exemple de cette circonstance quand on considère un *tore*, c'est-à-dire un *anneau*, reposant sur un plan horizontal : ces deux surfaces se touchent suivant une circonférence.

3° Enfin, la limite commune des arcs AB, MC étant en-

core une ligne, il se peut que, le long de celle-ci, la surface soit en partie du côté du plan P′, et en partie de l'autre côté de ce plan. Dans ce cas, le plan P′ est tout à la fois *tangent* et *sécant*. Les surfaces qui jouissent de la propriété d'être ainsi *coupées* par leur plan tangent sont dites *non convexes*. On dit encore, pour une raison que nous ne pouvons indiquer ici, qu'elles sont à *courbures opposées* (26).

La *gorge* d'une poulie ou, ce qui est la même chose, la partie rentrante d'un tore, l'hyperboloïde à une nappe, le paraboloïde hyperbolique, etc., présentent cette particularité.

33. Puisque le plan tangent en un point d'une surface contient, en général, les tangentes à toutes les courbes passant en ce point; puisque d'ailleurs deux droites qui se coupent déterminent un plan, il s'ensuit que *le plan tangent, en un point pris sur une surface, sera déterminé par les tangentes à deux courbes quelconques tracées sur la surface, et passant en ce point.*

34. *Une droite est une ligne qui se confond avec sa tangente;* conséquemment, 1° *le plan tangent en un point d'une surface réglée contient la génératrice rectiligne passant en ce point;* 2° *ce plan sera déterminé par cette génératrice et par la tangente à une autre ligne quelconque menée, sur la surface, par le point de contact donné.*

35. On appelle *normale* à une surface, en un point, la perpendiculaire au plan tangent en ce point.

36. Après avoir établi les propriétés générales des plans tangents, occupons-nous des propriétés particulières dont ils jouissent, lorsque les surfaces qu'ils touchent sont celles qui ont été considérées ci-dessus.

CHAPITRE III.

Plans tangents aux cylindres, aux cônes, aux surfaces développables, aux surfaces réglées, et aux surfaces de révolution.

37. Théorème. *Le plan tangent en un point d'une surface cylindrique, est tangent tout le long de la génératrice qui passe en ce point.*

Par deux points M, M′, appartenant à une même génératrice, faisons passer deux courbes quelconques MA, M′A′, tracées sur la surface. Prenons ensuite une nouvelle génératrice AA′, assez voisine de la première pour qu'elle rencontre nos deux courbes. Menons enfin les deux sécantes MAS, M′A′S′, et les deux tangentes MT, M′T′. Fig. 17.

Si le plan des deux génératrices tourne autour de MM′ de manière que la seconde génératrice AA′ s'approche indéfiniment de la première, les deux sécantes, constamment situées dans le plan mobile, se confondront, en même temps, avec leurs limites MT, M′T′. Donc ces tangentes MT, M′T′ sont situées dans un même plan avec la génératrice fixe. Mais ce plan est tangent au cylindre, d'une part en M et d'autre part en M′ (n° 34); donc, etc.

38. Théorème. *La projection de la tangente à une courbe est tangente à la projection de cette courbe.*

Par une courbe quelconque MA et par sa tangente MT faisons passer un cylindre projetant et un plan projetant. Si nous coupons ces deux surfaces par le plan de projection, nous Fig. 17.

obtiendrons, pour sections respectives, la projection M'A' de la courbe MA et la projection M'T' de la tangente MT. Or, d'après le théorème précédent, le plan projetant est tangent, en M et en M', au cylindre; donc l'intersection M'T' de ce plan et du plan de la courbe M'A' se confond avec la tangente à celle-ci.

39. Le dernier théorème est en défaut quand la tangente à la courbe donnée est perpendiculaire au plan de projection, car alors cette tangente se projette suivant un point. Dans ce cas, la projection de la courbe présente habituellement, en ce point, un *arrêt* ou un *rebroussement*.

40. Théorème. *Le plan tangent en un point d'une surface conique, est tangent tout le long de la génératrice qui passe en ce point.*

La démonstration est tout à fait semblable à celle qui précède (n° 37).

41. Nous avons vu, ci-dessus (n° 20), que les cylindres et les cônes sont des cas *singuliers* des surfaces développables. Il y a donc lieu de se demander si la propriété remarquable que nous venons de démontrer, relativement aux plans tangents, appartient à toutes ces surfaces. Avant de vérifier qu'il en est ainsi, nous allons essayer de faire comprendre la différence de forme qui existe entre les sections faites dans une surface réglée, par un plan P mené suivant une génératrice, selon que cette surface est *gauche* ou qu'elle est *développable*.

42. Considérons d'abord le cas d'une surface gauche; et
Fig. 18. supposons que l'on ait fait passer le plan P par la génératrice AB et par un point M, pris arbitrairement sur une génératrice CD, voisine de la première. Nous pourrons, pour fixer les idées, admettre que le plan P soit celui de la

figure. Alors, comme la génératrice CD a toujours pu être choisie de manière à ne pas se trouver tout entière dans le plan P, sa partie *inférieure* MD sera, par exemple, en *avant* de ce plan, tandis que sa partie *supérieure* sera *derrière* celui-ci.

Soient maintenant C'D', C''D''... des génératrices situées entre AB et CD, et soient EF, E'F', E''F''... d'autres génératrices, qui *précèdent* AB. Comme la surface est engendrée d'après une *loi continue*, les droites CD, C'D', C''D''... seront, en général, de *moins en moins inclinées* sur le plan P; et leur limite sera la première génératrice AB. Elles perceront donc celui-ci en des points M, M', M''... Quant aux droites EF, E'F', E''F''... situées à la *gauche* de AB, elles seront ordinairement, à cause de cette même loi de continuité, inclinées en sens contraire des premières, c'est-à-dire qu'elles auront leurs parties *supérieures* en *avant* du plan, et leurs parties *inférieures* en *arrière*. Les points N, N', N''..., où ces nouvelles génératrices percent le plan P, seront, avec les premiers points M, M', M''... situés sur une courbe MRN qui, en général, rencontrera la génératrice AB en un point R. En effet, si ce point était *transporté à l'infini*, le plan P serait *parallèle à une génératrice* INFINIMENT VOISINE *de* AB (*); ce que nous ne supposons pas (**).

(*) Quand nous disons, pour abréger le discours : « *Le plan* P *serait parallèle à une génératrice* INFINIMENT VOISINE *de* AB », nous entendons ceci : « *Le plan* P *est la limite vers laquelle tend un plan* P' *mené par* AB, *parallèlement à une génératrice voisine* CD, *lorsque celle-ci se rapproche indéfiniment de* AB ». Cette explication d'une dénomination empruntée à la *Théorie des infiniment-petits*, pourrait être répétée dans tous les cas analogues à celui qui nous occupe : nous la donnons une fois pour toutes.

(**) Si le plan P avait cette position particulière, il serait normal à

43. Il est actuellement bien facile de voir que le plan P est tangent à la surface gauche, au point R. En effet, il contient la génératrice AB et la tangente RT à la courbe MRN ; car, la tangente à une courbe plane est située dans le plan de celle-ci. Ainsi, *tout plan* P, *mené par une génératrice rectiligne d'une surface gauche, touche celle-ci au point où la génératrice rencontre la courbe d'intersection du plan et de la surface.*

44. Si le plan P tourne autour de AB, le point M, où il rencontre CD, se déplacera ; et, conséquemment, il en sera de même pour la courbe MRN et pour le point R. Nous voyons donc que *le point unique où une surface gauche est touchée par un plan passant suivant une génératrice, se déplace sur celle-ci, quand le plan tourne autour de cette même génératrice.*

45. Soit à présent une surface développable, ayant, pour
Fig. 19. arête de rebroussement, la courbe à double courbure GHKL. Par la génératrice AHB et par un point C de l'arête de rebroussement, voisin du point de contact H, faisons passer un plan P. Admettons, en outre, pour fixer les idées, que l'arc CH soit en arrière de ce plan, pris pour celui de la figure, les arcs GH, CKL, étant en avant.

Les tangentes nN, n'N', n''N''... mM, m'M''... à ces deux derniers arcs, rencontreront le plan P en des points N, N', N''... M, M'... ; en sorte que l'intersection cherchée se composera d'abord des deux arcs HNR, CMS.

Remarquons maintenant que, parmi les génératrices tan-

---

la surface, au point où la génératrice AB rencontre la ligne de striction. Le lecteur pourra consulter, sur ce sujet, une très-intéressante note de M. Chasles. (*Journal de Liouville*, tome II, page 413.)

gentes à l'arc CH, il y en a une au moins, telle que EF, *parallèle* au plan P : cette conclusion devient évidente si l'on fait mouvoir ce plan parallèlement à sa position primitive, jusqu'à ce que les deux points où il coupe CH se confondent en un seul point I.

Cela étant, les tangentes dont les points de contact sont situés sur l'arc IH donneront lieu, par leurs intersections avec le plan P, à un arc infini HU : car EF est la limite des génératrices qui rencontrent ce plan. De même, les tangentes à la partie IC de l'arête de rebroussement détermineront un autre arc infini CV.

Il est facile de reconnaître, en outre, que les deux arcs CV, CMS, ont une tangente commune ; et que les deux autres arcs HU, HR, ont, pour tangente commune, la génératrice AB. De plus, si le point C s'approche indéfiniment du point H, les arcs infinis CV, HU, et la tangente EF, se confondront, en même temps, avec la génératrice AB. Quant aux deux arcs HR, CS, ils formeront, *à la limite*, une seule courbe, ayant AB pour tangente. Mais alors le plan P sera, évidemment, tangent en H à la surface développable. On peut donc dire que : *le plan tangent à une surface développable, en un point de l'arête de rebroussement, coupe la surface suivant la génératrice passant par ce point, et suivant une courbe tangente, en ce même point, à l'arête de rebroussement.*

46. De cette discussion sur la forme générale de la section faite dans une surface développable par un plan P, passant par une génératrice, on conclut, sans difficulté, la propriété du plan tangent, indiquée ci-dessus (n° 41).

En effet, traçons sur la surface une courbe quelconque XY, coupant aux points X, Y la génératrice AB et l'arc in- Fig. 19.

fini CV ; et menons la sécante XYZ. Maintenant, faisons tourner le plan P autour de AB, de façon que le point C, où il coupe l'arête de rebroussement, s'approche indéfiniment du point H, commun à cette courbe et à sa tangente AB. A l'instant où ces deux points seront confondus en un seul, les points Y, X, coïncideront, et la sécante XYZ se confondra avec XT, tangente à la courbe XY. Cette tangente XT est donc contenue dans le plan *limite* P′, tangent en H à la surface développable ; donc celui-ci coïncide avec le plan BXT, tangent en X à cette surface. En d'autres termes : *le plan tangent à une surface développable, en un point de l'arête de rebroussement, est tangent tout le long de la génératrice rectiligne qui passe en ce point.* C'est ce qu'il fallait démontrer.

47. *Remarque. Le plan* P′, *tangent à la surface développable tout le long de la génératrice rectiligne* AB, *est la limite des plans qui, passant par cette droite, coupent l'arête de rebroussement.* Pour une raison que nous ne pouvons indiquer ici, il est appelé *plan osculateur* de cette courbe.

48. Théorème. *Le plan tangent à une surface de révolution, est perpendiculaire au plan méridien passant par le point de contact.*

Fig. 20. Par un point quelconque M, pris sur une surface de révolution dont XY est l'axe ; menons un *parallèle* AB et un *méridien* CD. Soient MT, MS, les tangentes à ces deux lignes : le plan TMS sera tangent, en M à la surface (n° 33). Par conséquent, pour démontrer le théorème, il suffit de faire voir que la tangente MT, au parallèle, est perpendiculaire au plan méridien MXY. Or, ce dernier plan, évidemment perpendiculaire au plan du parallèle, coupe celui-ci suivant un rayon OM, perpendiculaire à la tangente MT

[illegible] nte est per-

[illegible] *l'une surface*

[illegible] *dien passant*

[illegible] *nées par dif-*

[illegible] *ent l'axe en*

[illegible] conséquence

[illegible] partie, elle

[illegible] méridiens de

[illegible] quelconque

[illegible] ce que nous

[illegible] à la manière

[illegible] es projections

[illegible] veut repré-

[illegible] pour plus de Fig. 21.

[illegible] tateur. Imagi-

[illegible] gent à la sur-

[illegible] stamment par

[illegible] surface, dé-

[illegible], telle, que la

[illegible] le spectateur,

[illegible] *le*. Pour cette

[illegible] *rent* du corps.

[illegible] oit se donner,

[illegible] point de vue,

[illegible] orrespondant.

[illegible] néralité, serait

[illegible], comme dans

la première partie de cet ouvrage (n° 31), *l'œil de l'observateur placé sur une perpendiculaire au plan de projection, et à une distance infinie de ce plan.*

En effet, si nous supposons que le point de vue O s'éloigne indéfiniment du plan de projection XY, en restant constamment sur la perpendiculaire GH, le plan tangent P, considéré ci-dessus, aura pour limite un autre plan P′, également tangent à la surface S, mais perpendiculaire à XY. En même temps, *le contour apparent* ABCD *sera*, à la limite, *le lieu des points de contact des plans tangents, perpendiculaires au plan de projection.*

52. *Remarque.* Soit MT la tangente en M à la courbe ABCD : elle sera dans le plan P. Conséquemment, si nous prenons ABCD pour directrice d'un cône ayant son sommet en O, ce cône sera *circonscrit* à la surface S; c'est-à-dire que son plan tangent, suivant la génératrice quelconque OM, se confondra avec le plan P. La limite du cône, quand le sommet O se transporte à l'infini sur la droite GH, est, évidemment, *un cylindre circonscrit à la surface* S, *et dont les génératrices sont perpendiculaires à* XY. Par suite :

Pour obtenir la projection du contour apparent d'une surface donnée, il suffit de construire la trace d'un cylindre circonscrit à cette surface, et perpendiculaire au plan de projection.

point

e la surface Fig. 22.

abcd et par

admettons,

r sa projec-

de détermi-

ette surface.

arent, relatif

contact des

chacun de

atrice (37);

due avec la

la trace ho-

ière courbe,

de ces tan-

ot, relatif au

onstruit des

$p'q'$), per-

ces horizon-

des traces

verticales $a'g'$, $b'h'$ de ces plans sera la projection du contour apparent, relatif au plan vertical de projection.

54. Actuellement, cherchons la projection verticale du point de contact. Pour cela, menons, par la projection horizontale donnée m, une parallèle à pq : elle rencontrera la courbe $abcd$ en des points r, s..., qui seront les traces horizontales d'autant de génératrices, sur lesquelles sont situés les points de la surface cylindrique, projetés en m. Sur notre épure, où la trace horizontale du cylindre est une courbe fermée, convexe, le nombre des points r, s... se réduit à *deux* ; en sorte que la verticale projetée en m, rencontre la surface du cylindre, seulement en deux points, dont les projections verticales m', m'' sont situées sur les projections $s'm'$, $r'm''$ des génératrices ayant pour traces r, s.

Si la trace horizontale donnée était sinueuse, les points m', m''... pourraient être plus nombreux : mais la construction ne changerait pas.

55. Les projections verticales m', m'', qui répondent à la projection horizontale m, étant déterminées, considérons, par exemple, le plan tangent en (m, m'). Ainsi que nous l'avons déjà rappelé ci-dessus, ce plan se confond avec celui qui touche le cylindre au point (s, s'), où la génératrice (ms, $m's'$) perce le plan horizontal ; et celui-ci, devant contenir la tangente $\alpha\beta$ à la courbe $abcd$, a pour trace horizontale cette dernière droite. Quant à la trace verticale $\beta\gamma$ du même plan, on la détermine, soit en cherchant la trace verticale de la génératrice de contact, soit en construisant une *horizontale du plan*, telle que (mi, $m'i'$).

On trouve, de la même manière, les traces $\alpha'\beta'$, $\beta'\gamma'$ du plan tangent en (m, m'').

[illegible] nous avons [illegible] *ente à une* [illegible] Cette hypo- [illegible] s'il s'agissait [illegible] ropriétés de [illegible] ement ques- [illegible] pas difficile [illegible] par le point [illegible] à la courbe [illegible]

[illegible] es génératrices, [illegible] r celle-ci (*).

[illegible] courbe quel- Fig. 23
[illegible]) les droites [illegible] alèles. Enfin, [illegible] ur projection [illegible]

[illegible] rice EF, elle [illegible] s projections [illegible] onc bien fa- [illegible] , et la pro- [illegible]

[illegible] confond avec [illegible] est déterminé [illegible] O à la direc- [illegible] e proposé se [illegible]

[illegible] cède.

Or, les projections de cette droite sont les tangentes dt, $d't'$ aux courbes abc, $a'b'c'$ (38) ; et, d'après la remarque précédente (56), ces tangentes peuvent être regardées comme connues. Le plan demandé est donc $\alpha\beta\gamma$.

PROBLÈME III.

Mener un plan tangent à un cylindre, par un point extérieur à la surface.

FIG. 24. 58. Après avoir construit, comme dans le problème I, les projections des contours apparents du cylindre, menons, par le point donné (m, m'), une parallèle (ms, $m's'$) aux génératrices : le plan cherché contiendra, évidemment, cette parallèle. De plus, ce plan doit avoir sa trace horizontale tangente à la trace horizontale $abcd$ du cylindre. Si donc, par le point s, où la droite MS perce le plan horizontal, nous menons des tangentes $s\beta$, $s\beta'$ à la courbe $abcd$, chacune de ces droites sera la trace horizontale d'un plan satisfaisant à la question.

Le reste s'achève facilement.

PROBLÈME IV.

Mener un plan tangent à un cylindre, et parallèle à une droite donnée.

59. Si, par un point quelconque de l'espace, on mène une parallèle à la droite donnée, et une parallèle aux génératrices du cylindre, le plan de ces deux droites sera parallèle au plan tangent cherché. Par conséquent, on obtiendra la trace horizontale de celui-ci, en menant, à la trace horizontale de la surface, une tangente parallèle à la trace horizontale du plan auxiliaire.

Nous laissons au lecteur le soin de construire l'épure.

sur la surface.

sa trace ho- Fig. 25

nposons, de

sa projection

à celles du

n du contour

la projection

ase du cône;

atif au plan

les $s'a'$, $s'b'$

des tangentes

de terre.

du cylindre,

ints qui, si-

ction horizon-

ns qui satis-

β' à la base

, r des *géné-*

tiennent d'être

construction.

nts s'obtien-

au moyen de

des questions

Problèmes II,

olument nous

construire les

nées.

PROBLÈME VI.

Mener un plan tangent à une surface de révolution dont le méridien est donné, connaissant le point de contact.

62. Nous admettrons toujours, dans les questions relatives aux surfaces de révolution, que l'on a pris le plan horizontal de projection, perpendiculaire à l'axe, et le plan
Fig. 26. vertical, passant par l'axe. Les deux projections de cette droite seront alors le point o de la ligne de terre, et une droite ox' perpendiculaire à celle-ci.

Cela posé, supposons d'abord, pour plus de simplicité, que la surface de révolution soit donnée par son méridien *principal*, c'est-à-dire par celui qui est situé dans le plan vertical de projection; et adoptons, pour ce méridien, une ellipse ayant son grand axe $c'd'$ confondu avec ox' : la surface à laquelle nous nous proposons de mener un plan tangent sera un *ellipsoïde de révolution* (n° 6); mais nos raisonnements seront indépendants de cette hypothèse.

63 Le contour apparent, relatif au plan vertical, est la *méridienne principale* $a'b'c'd'$. En effet, en un point quelconque de cette courbe, le plan tangent à la surface est perpendiculaire au plan vertical, puisque celui-ci est confondu avec le méridien passant au point dont il s'agit. Quant au second contour apparent, lieu des points de contact des plans tangents verticaux, il est évident qu'il se compose en général de parallèles tels que $a'b'$, déterminés par des tangentes au méridien principal, menées parallèlement à l'axe. Dans le cas particulier représenté sur l'épure, ce parallèle (dont nous avons projeté seulement une moitié) partage l'ellipsoïde en deux parties symétriques; pour cette raison, on l'appelle ordinairement *équateur*.

64. Soit actuellement m la projection horizontale du point de contact M. Pour déterminer la projection verticale, il suffit d'observer que le point M est situé sur un parallèle, dont la projection horizontale est la circonférence nmp, décrite du point o comme centre, et dont il est bien facile d'obtenir la projection verticale $n'm'p'$. Il est clair, en même temps, qu'à la projection horizontale m peuvent correspondre les projections verticales m', m'' d'autant de points situés sur la surface.

65. Ces constructions préliminaires étant effectuées, supposons qu'il s'agisse de mener le plan tangent en (m, m'). Pour résoudre ce problème, nous construirons d'abord la *normale* au même point. Or, la projection horizontale de cette droite est, évidemment, le rayon mo (49); et, pour obtenir sa projection verticale, rappelons-nous que cette normale, et la normale au point (n, n'), coupent l'axe en un même point (49). Si donc nous menons en n' la *normale* $n'i'$ *à la méridienne principale* (*), et si nous joignons le point i', où cette droite rencontre oz', avec m', la normale en (m, m') sera déterminée.

Il ne s'agit plus, pour achever l'épure, que de mener par le point (m, m') un plan $\alpha\beta\gamma$, perpendiculaire à la droite $(mo, m'i')$.

66. Dans l'exemple que nous avons choisi, le point (m, m'') donne lieu à une seconde normale et à un second plan tangent $\alpha'\beta'\gamma'$, symétrique du premier par rapport au plan de l'équateur. A cause de cette symétrie, les deux

(*) Nous admettons, comme ci-dessus (56), que l'on sait toujours, *rigoureusement* ou *approximativement*, construire la tangente, et par suite la normale, a une courbe plane, en un point de cette ligne.

plans tangents se coupent suivant une droite située dans ce dernier plan.

PROBLÈME VII.

Mener un plan tangent à une surface de révolution dont le méridien n'est pas donné, connaissant le point de contact.

Fig. 27. 67. Soient ab, $a'b'$ les deux projections d'une ligne quelconque, plane ou à double courbure, qui, en tournant autour de l'axe (o, oz'), engendre la surface. Soit ensuite m la projection horizontale du point de contact. On obtiendra, comme dans le problème précédent, la projection verticale m' de ce point, en construisant le parallèle $(mn, m'n')$ qui passe en ce même point.

On pourrait actuellement chercher la section faite dans la surface par le plan vertical de projection; puis, ayant obtenu ainsi la méridienne principale, on serait ramené au problème qui précède. Mais il est plus simple d'opérer directement sur les données, comme il suit.

Par le point (n, n'), où le parallèle passant par le point de contact coupe la génératrice, menons la tangente $(nt, n't')$ à cette courbe; puis, en ce même point, imaginons un plan perpendiculaire à la tangente : il contiendra la normale en (n, n') à la surface de révolution. Or, cette normale est projetée horizontalement suivant no; donc le point où elle coupe l'axe est l'intersection de celui-ci avec la trace verticale du plan dont il vient d'être question.

Pour obtenir cette trace verticale, menons nc perpendiculaire à nt, et $n'c'$ parallèle à xy : ces deux droites seront les projections d'une horizontale du plan, ayant pour trace verticale le point (c, c'); de sorte que $c'r'$, perpendi-

culaire à $n't'$, sera la trace verticale du *plan normal*, et que le point r' sera celui où la normale (no, $n'r'$) coupe l'axe.

Il ne s'agit plus maintenant, pour achever l'épure, que de mener les projections (mo, $m'r'$) de la normale au point donné, et de faire passer, par ce point, un plan $\alpha\beta\gamma$ perpendiculaire à cette droite.

68. Adoptons, pour génératrice de la surface de révolution, une droite (ab, $a'b'$). En appliquant à cet exemple particulier la méthode employée dans l'épure précédente, on rencontrerait d'assez grandes simplifications; mais il sera encore plus court d'opérer comme il suit. Fig. 28.

m étant toujours la projection horizontale du point de contact M, soit (n, n') le point de la génératrice située sur le parallèle qui passe en M; et soit, par suite, m' la projection verticale de ce dernier point.

A cause de la symétrie de la surface autour de son axe (o, oz'), si nous pouvons construire le plan tangent en (n, n'), il nous suffira de le faire tourner d'un angle égal à nom, pour obtenir le plan tangent en M. Or, le premier de ces deux plans contient la génératrice (ab, $a'b'$) (34), et, d'un autre côté, il doit être perpendiculaire au plan méridien noz'. Conséquemment, sa trace horizontale est la perpendiculaire $\alpha'\beta'$ abaissée du point a sur on, et sa trace verticale $\beta'\gamma'$ passe par la trace verticale b' de la génératrice.

Supposons maintenant que ce plan tourne autour de l'axe, jusqu'à ce que le point (n, n') se confonde avec (m, m'). Alors la trace horizontale $\alpha'\beta'$ prendra la position $\alpha\beta$; et comme le point (o, d'), où l'axe rencontre le plan mobile, ne change pas, la trace verticale du plan cherché sera $\beta d'\gamma$.

69. *Remarque.* Si le point de contact (n, n') se déplace sur la génératrice $(ab, a'b')$, la trace horizontale $\alpha'\beta'$ tourne autour du point a, puisque cette trace est perpendiculaire au rayon an. Il suit de là et des propriétés générales démontrées dans le chapitre III (44), que la surface dont nous venons de nous occuper est *gauche*. Nous verrons en effet, plus loin, qu'elle est connue sous le nom de *surface gauche de révolution*. Nous verrons aussi que cette surface ne diffère pas de l'*hyperboloïde de révolution, à une nappe.*

PROBLÈME VIII.

Par une droite donnée, faire passer un plan tangent à une sphère donnée.

Fig. 29. 70. Lorsque deux plans P, P′, non parallèles, touchent une sphère O, leur intersection AB est, évidemment, perpendiculaire au plan du grand cercle EDFD′ mené par les points de contact D, D′. Par suite, les tangentes CD, CD′ à la circonférence EDFD′ viennent concourir au point C, où le plan de cette circonférence est rencontré par l'intersection des plans P, P′.

Si donc AB est la droite par laquelle on veut faire passer un plan tangent à la sphère O, on mènera, du centre de celle-ci, un plan perpendiculaire à AB; on déterminera le point C et la circonférence EDFD′, intersections du plan avec la droite et avec la sphère; on construira les tangentes CD, CD′; et les points D, D′ seront ceux où la sphère touchera les deux plans cherchés P, P′.

71. Pour effectuer les constructions qui viennent d'être
Fig. 30. indiquées, faisons passer la ligne de terre par le centre o de la sphère : les contours apparents de celle-ci, relatifs aux deux plans de projection, seront confondus suivant

une circonférence de grand cercle *efgh*. Soient, en outre, *ab*, *a'b'* les projections de la droite donnée AB (*). Les perpendiculaires $o\alpha$, $o\beta$, abaissées du centre *o* sur ces projections, seront les traces du plan EDFD'; et nous déterminerons, par la construction ordinaire, les projections *c*, *c'* du point C.

Actuellement, pour n'avoir pas à construire les projections de la circonférence EDFD', rabattons son plan, c'est-à-dire le plan $\alpha o\beta$, sur le plan horizontal, en le faisant tourner autour de $o\alpha$. La circonférence EDFD' se rabattra suivant *efgh*; et le point (*c*, *c'*) viendra se placer en un point C_1, que nous obtiendrons par la construction connue (Prob. XXXVIII, Première Partie). Menons ensuite, de ce point C_1, les tangentes C_1D_1, C_1D_2 à *efgh*; nous aurons en D_1, D_2 les rabattements des points de contact D, D'; après quoi il ne s'agira plus, pour achever l'épure, que de revenir de ces rabattements à leurs projections. On obtient ainsi les deux plans $\lambda_1\mu_1\nu_1$, $\lambda_2\mu_2\nu_2$.

72. *Remarque.* L'épure dont nous venons d'indiquer la construction comporte trois *vérifications* :

1° Les traces de chacun des deux plans tangents doivent passer, respectivement, par les traces de la droite AB;

2° Elles doivent être perpendiculaires aux projections des rayons menés aux points de contact (d_1, d'_1), (d_2, d'_2);

2° Enfin, les traces horizontales $\lambda_1\mu_1$, $\lambda_2\mu_2$ doivent pas-

(*) Si les deux projections *ab*, *a'b'* coupaient la circonférence *efgh*, il serait nécessaire de s'assurer que la plus courte distance du centre *o* à la droite AB est plus grande que le rayon de la sphère. Pour éviter cette recherche préliminaire, on prend habituellement une, au moins, des deux projections, *extérieure* à *efgh*.

ser, respectivement, par les points R_1, R_2, où les tangentes C_1D_1, C_1D_2 coupent la trace horizontale $o\alpha$.

73. *Remarque.* Si les traces de la droite AB étaient fort loin du centre de la sphère, la construction qui a donné le point (c, c') serait incommode, et il vaudrait mieux en employer une autre, résultant de la solution du problème suivant : *Construire les projections du point où une droite rencontre un plan qui lui est perpendiculaire, sans employer les traces de la droite.* Nous laissons au lecteur le soin de chercher cette solution.

PROBLÈME IX.

Mener à une surface de révolution S, dont le méridien est connu, une normale parallèle à une droite donnée D.

74. En supposant le problème résolu, soit P le *pied* de la normale cherchée N; c'est-à-dire le point de la surface S, pour lequel la normale est parallèle à la droite D. Le plan méridien en P doit contenir N (49); donc il est parallèle à D. De plus, la section déterminée dans la surface par ce plan méridien, a pour normale, au point P, la droite N : cette dernière proposition résulte de la propriété principale du plan tangent (27), et de la définition de la normale (35).

Il faut donc, pour résoudre le problème :

1° Mener un plan méridien M′ parallèle à la droite D; 2° imaginer, par un point de l'axe, une parallèle D′ à cette même droite; 3° amener le méridien M′ et la droite D′ dans le méridien principal M, en les faisant tourner autour de l'axe; 4° mener à la courbe méridienne principale une nor-

revenir du

de à une droite
n cette droite;
èle à la même
emarquer, re-
sement la *posi-*
ur le point de

CHAPITRE V.

Sections planes des cylindres et des cônes.

75. Les problèmes dont nous allons développer les solutions ne sont, évidemment, que des cas très-restreints de la question dans laquelle on se proposerait de trouver l'intersection de deux surfaces quelconques. Mais comme ces problèmes ont des applications continuelles, qu'ils sont beaucoup plus simples que le problème général, et qu'ils donnent, en quelque sorte, la *clef* de celui-ci, nous avons pensé, à l'exemple de plusieurs auteurs, qu'il était indispensable de les traiter à part.

PROBLÈME X.

Trouver : 1° l'intersection d'un cylindre vertical et d'un plan perpendiculaire au plan vertical; 2° la tangente en un point de l'intersection; 3° le rabattement de cette courbe et de sa tangente; 4° le développement du cylindre; 5° la transformée de l'intersection; 6° la tangente à cette transformée.

76. *Projections de l'intersection.* Le cylindre étant vertical, tous les points de sa surface se projetteront horizontalement sur sa base *acdb*, que nous supposons située dans le plan horizontal de projection. Par conséquent, cette courbe *acdb* sera la projection horizontale de la section faite dans le cylindre par le plan donné $\alpha\beta\gamma$. Quant à la projection verticale de cette section, il est évident qu'elle se réduit à la partie a_1b_1 de la trace verticale de ce plan, comprise

Fig. 31.

ces limites.

miné, à sa

s'ensuit que

nt résolue.

ente en un

rojetée, ho-

u cylindre,

écant. Ceci

noncer : *la*

d'une sur-

ngent à la

enir l'inter-

sur l'un ou

écant ; mais

nées, de le

an vertical,

ontal. Dans

e, le point

de rotation,

arallèle à la

deur, sur le

nt, la *nou-*

st m_2, et sa

quent aussi,

intersection

est une cir-

yez la note

pement est

la limite des développements des prismes inscrits au cylindre (20). Si donc, après avoir inscrit dans la base *abcd* un polygone dont les côtés soient assez petits pour qu'on puisse, sans erreur sensible, les regarder comme confondus avec les arcs correspondants, on porte ces côtés, les uns à
Fig. 32. la suite des autres, sur une droite indéfinie XY, puis qu'on élève, par les points de division ainsi obtenus, des droites perpendiculaires à XY, et égales à la hauteur $c'c''$ du cylindre, l'ensemble des petits rectangles ainsi formés pourra être regardé comme étant, à fort peu près, le développement du cylindre.

Sur notre épure, nous avons supposé que le prisme qui remplace le cylindre est *ouvert* suivant la génératrice projetée en *a*, et nous avons placé la droite XY sur le prolongement de la ligne de terre : cette disposition est la plus commode de toutes, surtout quand on veut construire la *transformée* de la section.

81. *Remarque.* Quand le cylindre est à base circulaire, on peut, pour obtenir une approximation plus grande, modifier, comme il suit, le procédé qui vient d'être indiqué.

Ayant divisé la circonférence *abcd* en *arcs égaux* suffisamment petits, on prend, sur la droite XY, une longueur égale aux $\frac{22}{7}$ du diamètre *ab;* après quoi l'on divise cette longueur en autant de parties égales qu'il y a de divisions dans la base du cylindre. On achève ensuite comme il a été dit ci-dessus.

Cette méthode est, *graphiquement parlant*, très-approchée : on sait, en effet, que le nombre $\frac{22}{7}$, donné par Archimède, ne diffère du rapport de la circonférence au diamètre, que d'une quantité inférieure à 0,002.

82. *Transformée de la section.* Concevons, comme précédemment, qu'un prisme soit inscrit au cylindre. La section faite dans ce polyèdre, par le plan $\alpha\beta\gamma$, sera un polygone dont les sommets (a, a_1), (m, m_1), (c, c_1)... viendront, quand nous développerons la surface prismatique, se placer en A, M, C... sur les *transformées* des arêtes. De plus, les distances Aa, Mm, Cc... seront égales, respectivement, à $a'a_1$, $m'm_1$, $c'c_1$... Enfin, le polygone dont les sommets sont les points A, M, C... ainsi obtenus, aura, évidemment, ses côtés ou ses *éléments* égaux aux éléments correspondants du polygone tracé sur le prisme : on pourra donc le désigner sous le nom de *transformée* de celui-ci. Cela posé, si le nombre des faces du prisme inscrit augmente indéfiniment, le développement du prisme tendra sans cesse à se confondre avec le développement du cylindre; et, en même temps, la *transformée* de la section prismatique s'approchera de plus en plus d'une certaine courbe-limite AMCB..., laquelle est dite *transformée* de la section cylindrique (*).

Cette transformée sera obtenue avec toute l'approximation que la question comporte si, après avoir construit, comme il a été indiqué plus haut, le développement du cylindre, et après avoir rapporté sur ce développement les points (a, a_1), (m, m_1), (c, c_1)..., on fait passer, par les points A, M, C..., un *trait continu* AMCB... (**).

(*) Pour ne pas compliquer l'épure, nous avons désigné, par les mêmes lettres A, M, C, B... les sommets du polygone obtenu en développant le prisme, et les limites de ces sommets, situées sur la courbe avec laquelle le polygone tend à se confondre. Mais il est bien entendu que, rigoureusement parlant, *les premiers points ne coïncideront jamais avec les seconds.*

(**) On peut se proposer de trouver l'équation de la transformée AMCB. Pour cela, supposons que l'on sache exprimer l'*arc* $am = s$ de

83. *Remarque.* Nous avons vu, tout à l'heure, que la transformée de la section prismatique a ses éléments égaux, respectivement, à ceux de la section. Par suite, les périmètres de ces deux polygones sont égaux entre eux. Or, deux quantités constamment égales ont des limites égales; donc *la section plane d'un cylindre, et la transformée de cette section, sont deux lignes de même longueur.*

84. On reconnaîtra sans difficulté que le raisonnement qui précède s'appliquerait, soit à *une ligne quelconque tracée sur un cylindre*, soit, plus généralement, à *toute ligne tracée sur une surface développable quelconque.* Nous énoncerons donc, dès à présent, ce théorème général :

---

la base du cylindre, en fonction de l'*abscisse* $ap = x$ du point m, et soit $s = \varphi(x)$ la relation entre ces deux variables. Soient, en outre, θ l'inclinaison du plan sécant sur le plan horizontal, et h la hauteur à laquelle ce plan vient couper la génératrice $a'a''$. On aura, pour l'ordonnée du point (m, m_1), $z = h + x \operatorname{tg}\theta$. Or, sur le développement, $am = X = s$, et $Mm = Y = z$. L'équation cherchée sera donc $X = \varphi\dfrac{Y-h}{\operatorname{tg}\theta}$.

Si la base du cylindre est un cercle de rayon R, on aura

$$s = R \operatorname{arc\,cos}\frac{R-x}{R}.$$

Par conséquent, la transformée sera représentée par

$$X = R \operatorname{arc\,cos}\left(1 - \frac{Y-h}{R \operatorname{tg}\theta}\right),$$

où, en réduisant, par $1 - \dfrac{Y-h}{R \operatorname{tg}\theta} = \cos\dfrac{X}{R}$.

Pour simplifier cette équation, transportons l'origine au point C dont les coordonnées sont $\frac{1}{2}\pi R$ et $h + R \operatorname{tg}\theta$; et nous aurons enfin :

$$y = R \operatorname{tg}\theta \sin\frac{x}{R}.$$

On voit que *la transformée de la section plane d'un cylindre de révolution est une variété de la sinusoïde.*

Toute ligne, tracée sur une surface développable, est de même longueur que sa transformée.

85. Il existe, entre toute ligne tracée sur la surface d'un cylindre et la transformée de cette ligne, une autre relation remarquable, que l'on peut énoncer ainsi :

Si l'on considère, sur une surface cylindrique et sur son développement, une ligne quelconque et sa transformée, les tangentes à ces deux lignes, en deux points correspondants, sont également inclinées sur les génératrices et sur les transformées de celles-ci ;

Ou, en termes plus courts, mais *moins exacts :*

L'angle que fait la tangente à une courbe tracée sur la surface d'un cylindre, avec la génératrice passant par le point de contact, reste invariable quand on développe la surface.

Pour démontrer cette proposition, substituons encore, au cylindre, un prisme qui lui soit inscrit, et traçons, sur la surface prismatique, un polygone dont les sommets soient les points de rencontre des arêtes avec la courbe tracée sur le cylindre ; puis développons la surface. Dans cette opération, les trapèzes formés par les arêtes, par les côtés de la base du prisme et par les côtés du polygone, viendront se placer, les uns à la suite des autres, sur le plan de développement. Conséquemment, *l'angle formé par un côté quelconque du polygone, avec les arêtes du prisme, reste invariable quand on développe celui-ci.* Or, le prolongement d'un côté MN du polygone tracé sur la surface prismatique a pour limite la tangente en M à la courbe tracée sur le cylindre. De même, le prolongement de l'élément M'N' appartenant à la transformée du polygone, a pour limite la tangente en M' à la transformée de la courbe, etc.

86. Des considérations toutes semblables prouvent que :

Si l'on considère, sur une surface développable et sur son développement, une ligne quelconque et sa transformée, les tangentes à ces deux lignes, en deux points correspondants, sont également inclinées sur la génératrice passant par ce premier point et sur la transformée de celle-ci.

87. *Construction de la tangente à la transformée de la section cylindrique.* Reportons-nous maintenant à la fig. 31. La tangente au point M de l'espace, la projection horizontale *rm* de cette droite, et la portion M*m* de la génératrice forment un triangle M*mr*, évidemment rectangle en *m*, et égal, par conséquent, au triangle M*mr* (fig. 32) formé par la tangente M*r* à la transformée de la section, la transformée M*m* de la génératrice, et la transformée de la base du cylindre. En effet, ces deux triangles ont un angle aigu égal et un côté égal. Donc la base *mr* du second est égale à la base *rm* du premier. De là, cette règle :

Prenez sur le développement du cylindre, à partir du point où la transformée de la génératrice passant par le point de contact rencontre la transformée de la base, et dans le sens convenable, une distance égale à l'intervalle compris entre la trace horizontale de la tangente et la trace horizontale de la génératrice; joignez le point ainsi obtenu avec le transformé (*) *du point de contact; vous aurez la tangente à la transformée de la courbe tracée sur ce cylindre.*

DE L'HÉLICE.

88. Parmi les courbes, en nombre infini, que l'on peut

(*) Puisque l'on dit : *la transformée d'une ligne*, pourquoi ne dirait-on pas : *le transformé d'un point?* Par les progrès des sciences et des arts, certains néologismes sont forcément introduits dans le langage.

elconque,

e, sous ce

e. D'après

e, par des

es hélices.

regardées

e sont des

nque peut

a une di-

ne saurait

rès ce que

ente en un

atrices, un

e pour dé-

indre quel-

Fig. 33.

l'hélice soit

BR, CT à

ant par les

En d'autres

t des paral-

atrices, la

es trois au-

est droite,

atrices, est

hélices tra-

oient planes

ulaires à ces

91. *Remarque.* La section obtenue en coupant un cylindre par un plan perpendiculaire aux génératrices, est appelée *section orthogonale* ou *section droite*.

92. Théorème. *Dans l'hélice, la sous-tangente est égale à l'abscisse curviligne.*

Fig. 34. Prenons, pour *origine* de l'hélice AMB, le point A où elle perce la *section droite* A*mb* du cylindre C. Soit ensuite MR la tangente en un point quelconque M de la première courbe : cette tangente aura pour projection, sur le plan XY de la section droite, la tangente *m*R à cette dernière ligne. La distance R*m*, comprise entre la *trace* R de RM et la projection *m* de M, est ce qu'on appelle *sous-tangente;* et l'arc A*m* est l'*abscisse curviligne* du point M.

Le théorème énoncé consiste donc en ce que

$$Rm = \text{arc } Am.$$

Or, si on développe le triangle *cylindrique* A*m*M, on obtiendra un triangle rectangle A'*m*'M', dans lequel les côtés M'*m*', A'*m*' de l'angle droit seront égaux, respectivement, à M*m* et à l'arc A*m* rectifié. D'un autre côté, l'hypoténuse A'M' pouvant être considérée comme se confondant avec sa tangente en M', il résulte, de la règle démontrée ci-dessus (87), que le côté A'*m*' est égal à la sous-tangente R*m*; celle-ci est donc égale à l'abscisse curviligne A*m*.

93. Théorème. *Le lieu du point où la tangente à l'hélice perce le plan d'une section droite du cylindre, est une développante de cette section droite.*

D'après le théorème précédent, il faut, pour avoir ce lieu,
Fig. 34. mener une tangente quelconque *m*R à la section droite A*mb*, et prendre ensuite, sur cette tangente, à partir du point de contact, une longueur *m*R, égale à l'arc A*m* rec-

qui sert à

Amb. Le

oints, sur

d'hélices

, pris sur

fermée,

ffet, ima-

diculaire-

les idées,

r le point

clinaisons

continue,

ura une de

r rencon-

après les

une partie

nite (*).

---

fermée, elle

déterminés

génératrice,

pris entre les

l'hélice, etc.

, si l'on dé-

ar *h* la hau-

pris entre le

e fait, avec

es; on aura

s contenues

Cela posé, considérons, avec la première de ces hélices, une courbe quelconque ACB, tracée sur la surface cylindrique, et terminée aux points A, B. Quand nous développerons le cylindre, ces deux lignes conserveront, respectivement, leurs longueurs (84). Or, la droite, transformée de l'hélice, est plus courte que la transformée de ABC, etc.

PROBLÈME XI.

Trouver : 1° les projections de la section droite d'un cylindre quelconque; 2° le rabattement de cette courbe; 3° le développement du cylindre; 4° la transformée de sa base; 5° les tangentes à la section droite et à la transformée de la base.

95. *Projections de la section droite.* Supposons, comme dans le Problème X, que le cylindre soit donné par sa trace horizontale *abcd*, et par la direction de ses génératrices. Après avoir déterminé, comme à l'endroit cité, les projections des contours apparents, prenons un plan $\alpha\beta\gamma$, dont les traces soient, respectivement, perpendiculaires aux projections des génératrices : ce plan, par son intersection avec la surface du cylindre, donnera la section droite de celui-ci.

Fig. 35.

Pour obtenir les projections de cette courbe, il suffit, évidemment, de chercher les points où un certain nombre de génératrices, convenablement choisies, percent le plan $\alpha\beta\gamma$. Nous avons indiqué, sur l'épure, la construction qui donne le point (m, m'), correspondant à la génératrice quelconque $(mp, m'p')$. En renvoyant, pour l'explication de ce tracé, au Problème VII de la Première Partie, nous mentionnerons cependant une circonstance particulière qui se présente dans cette épure, et qui la simplifie considérablement.

Comme les plans auxiliaires, tels que $mp\delta\varepsilon$, sont tous parallèles entre eux, les projections verticales de leurs intersections avec le plan $\alpha\beta\gamma$ seront toutes parallèles à l'une d'elles, par exemple, à $e'm'$. Il suffira donc, pour obtenir ces projections avec une grande exactitude, de construire les points où elles rencontrent la ligne de terre.

En faisant passer deux traits continus par les points déterminés comme il vient d'être dit, on aura les projections de la section droite. Mais, pour que ces courbes soient mieux construites, il convient de leur mener des tangentes, d'abord en des points quelconques, et ensuite en des *points remarquables*.

95. *Construction de la tangente.* Considérons d'abord un point quelconque M de la section, projeté en (m, m'). La tangente en ce point est l'intersection du plan de la courbe et du plan tangent au cylindre, en ce même point M (77). Si donc nous construisons la trace horizontale pr de ce dernier plan, et que nous joignions le point r, où elle rencontre la trace horizontale $\alpha\beta$, avec la projection horizontale m du point de contact, nous aurons la projection horizontale de la tangente en M. On obtiendra la projection verticale $r'm'$ de la même droite, en faisant attention que le point (r, r'), où se coupent les traces horizontales des deux plans, est la trace horizontale de leur intersection.

96. Les *points remarquables* sont, dans l'épure qui nous occupe, les points (f, f'), (h, h'), (g, g'), (k, k') situés sur les *contours apparents*. Les considérations exposées ci-dessus (52), ou l'application de la règle précédente, prouvent que les tangentes en f, h, sont les projections horizontales df, bh des génératrices extrêmes, et que les

tangentes en g', k' sont, semblablement, les projections du contour apparent, relatif au plan vertical.

97. Pour éviter la multiplicité des constructions, nous n'avons pas déterminé : 1° les points pour lesquels la tangente est *horizontale*; 2° les points pour lesquels la tangente est *parallèle au plan vertical*. Nous engageons le lecteur à effectuer cette recherche, qui ne présente aucune difficulté.

98. Tout ce qui précède subsisterait sans modification, si le plan $\alpha\beta\gamma$, au lieu d'être perpendiculaire aux génératrices du cylindre, avait une direction arbitraire. Ainsi, nous pouvons regarder comme résolu ce problème général : *Construire les projections de la section faite dans un cylindre par un plan quelconque.*

99. *Rabattement de la section droite.* On a vu, dans la Première Partie (Problèmes XXXVIII et suivants), comment on peut construire le rabattement d'une figure plane, connaissant ses deux projections. L'application du procédé général, aux différents points (m, m'), (g, g'), etc., fournit les points M_1, G_1... En unissant ceux-ci par un trait continu, on aura, avec une approximation suffisante, non plus les projections de la section droite, mais cette section même, en *vraie grandeur*. Il ne sera pas plus difficile de construire le rabattement rM_1 de la tangente rM.

Nous n'aurions donc rien à dire sur cette partie de l'épure, si nous ne devions faire remarquer les simplifications suivantes, applicables à toutes les questions ayant pour objet les rabattements des figures planes.

100. 1° Considérons, pour fixer les idées, le point M de l'épure, projeté en m, m', et rabattu en M_1. Pour obtenir ce dernier point, on doit (Première Partie, Pro-

blème XXXVIII) construire l'hypoténuse du triangle Mme, rectangle en m, et dans lequel le côté vertical Mm est égal à $\mu m'$.

Au lieu de rabattre ce triangle autour de sa base me, et de répéter la même opération pour les triangles semblables à celui-là (*), et relatifs aux points G, F..., ce qui amènerait de la confusion dans l'épure, transportons tous ces triangles, *parallèlement à eux-mêmes*, jusqu'à ce que leurs bases viennent se placer sur une droite $x'y'$. Si maintenant le plan vertical qui les contient tous se rabat sur le plan horizontal, les diverses hypoténuses viendront, évidemment, se placer sur une même droite $e_1\lambda_1$ dont nous construirons un point m_1, en prenant sur $m\mu_1$, perpendiculaire à $x'y'$, la distance $\mu_1 m_1$ égale à $\mu m'$. Les perpendiculaires mm_1, gg_1... donneront ensuite les hypoténuses cherchées e_1m_1, e_1g_1...

2° Il n'est pas nécessaire, pour construire les points m_1, n_1, g_1..., de connaître les projections horizontales correspondantes m, n, g... : on peut même, pour plus d'exactitude et de simplicité, déterminer celles-ci à l'aide des rabattements m_1, n_1, g_1.

En effet, l'angle aigu $x'e_1\lambda_1$ est, évidemment, le complément de l'angle aigu formé par une génératrice quelconque pM et par sa projection horizontale pm. D'après cela, prenons, sur la génératrice pM, un point quelconque, par exemple celui qui est projeté en e, e''; puis, après avoir abaissé pp_1 perpendiculaire à $x'y'$ et avoir pris e_1e_2 égale à $e'e''$,

(*) Ces triangles rectangles sont semblables, parce que l'angle aigu Mem mesure l'inclinaison du plan $\alpha\beta\gamma$ sur le plan horizontal. (Voyez la Première Partie.)

menons p_1e_2 : cette droite sera la position occupée par la génératrice quand, après l'avoir transportée parallèlement à elle-même, nous l'aurons fait tourner autour de $x'y'$.

Les autres génératrices viendront, semblablement, se rabattre suivant des parallèles à p_1e_2. Nous obtiendrons un point de chacune d'elles en abaissant bb_1, dd_1... perpendiculaires à $x'y'$; et, en coupant tous ces rabattements par la perpendiculaire commune $e_1\lambda_1$, nous obtiendrons, tout d'un coup, les points m_1, n_1, g_1... Nous pourrons ensuite, comme nous venons de le dire, déterminer par leur moyen, non-seulement la projection horizontale de la section, mais encore sa projection verticale.

3° Les rabattements m_1, n_1, g_1... ayant été construits par l'un ou par l'autre des deux procédés qui viennent d'être indiqués, la recherche du rabattement $M_1N_1G_1$... de la section droite n'offrira plus de difficulté.

101. *Remarque.* Au lieu de regarder les droites p_1m_1, b_1h_1..., comme ayant été obtenues par une *translation* et une *rotation* des génératrices, on peut supposer que ces dernières droites ont été projetées sur le plan vertical ayant pour trace $x'y'$, et que ce plan vertical a été rabattu sur le plan horizontal de projection. A ce point de vue, le plan vertical dont il s'agit est un *nouveau plan vertical de projection*, et la droite $x'y'$ est une *nouvelle ligne de terre*. En même temps, la droite $e_1\lambda_1$ sera la *nouvelle trace verticale* du plan $\alpha\beta\gamma$; la droite $m_1n_1g_1$ sera la *nouvelle projection verticale* de la section droite, etc. On voit qu'il peut être utile, dans certains cas, d'employer des *projections auxiliaires*.

102. *Développement du cylindre.* Nous savons que la section droite d'un cylindre se transforme, quand on effec-

tue le développement, en une perpendiculaire aux transformées des génératrices (88). Si donc, sur une droite indéfinie UV, nous prenons les distances HM, MG, GF, FN, NK, Fig. 36.
KH_1, respectivement égales aux arcs H_1M_1, M_1G_1 *rectifiés* (*), Fig. 35.
puis que, par les points H, M, G..., nous menions des perpendiculaires à UV, ces droites pourront être regardées comme les transformées des génératrices du cylindre, dont UV représentera la section droite.

103. *Transformée de la base.* Rappelons-nous maintenant qu'une ligne quelconque, tracée sur la surface du cylindre, est de même longueur que sa transformée (84). Par conséquent, pour construire un certain nombre de points appartenant à la transformée de la trace horizontale du cylindre, il nous suffira de prendre les longueurs H*b*, M*p*... Fig. 36.
respectivement égales aux *vraies grandeurs* h_1b_1, m_1p_1...
des portions de génératrices, comprises entre le plan de la section droite et le plan horizontal. La courbe *bpa*..., qui réunira tous les points ainsi obtenus, sera la transformée cherchée.

Quant à la partie de la surface située au-dessus de la section droite, on peut la terminer par un simple *arrachement*.

104. *Tangente à la transformée de la base.* Les considérations du n° 87 prouvent que, pour mener la tangente au point *p* de la transformée, correspondant au point M de la section droite, il suffit de prendre, sur la droite indéfinie UV, la distance M*r* égale à M_1r, et de joindre le point *r* au

(*) Pour rectifier approximativement les arcs H_1M_1, M_1G_1..., on inscrit, dans chacun d'eux, des cordes égales entre elles et assez petites pour qu'on puisse, sans erreur sensible, les regarder comme se confondant avec les petits arcs qu'elles sous-tendent.

point p. On peut encore déterminer le point r par la condition que la distance pr soit égale à la partie pr de la tangente à la trace horizontale du cylindre.

105. Si l'on voulait déterminer les points de la transformée bpa... pour lesquels la tangente est perpendiculaire aux transformées des génératrices, il suffirait d'observer qu'ils correspondent aux points de la base pour lesquels, pareillement, la tangente est perpendiculaire aux génératrices. Pour abréger, nous n'avons pas indiqué ces points sur notre épure.

106. *Remarque*. Il n'est pas nécessaire, pour déterminer le développement du cylindre, de construire les deux projections de la section droite. Il suffit, comme on a pu le prévoir, d'employer le rabattement $\sigma_1\lambda_1$ de cette courbe, c'est-à-dire sa projection sur le plan vertical auxiliaire $x'y'$. On pourrait même se passer complétement de la section droite, et recourir à un procédé indiqué par M. Babinet. L'usage ayant fait prévaloir la méthode exposée ci-dessus, et celle de l'illustre savant, tout ingénieuse qu'elle est, ne nous paraissant pas préférable à l'autre, nous nous en tiendrons aux explications précédentes.

PROBLÈME XII.

Trouver : 1° l'intersection d'un cône de révolution et d'un plan perpendiculaire au plan vertical; 2° la tangente en un point de l'intersection; 3° le rabattement de cette courbe et de sa tangente; 4° le développement du cône; 5° la transformée de l'intersection; 6° la tangente à cette transformée.

107. *Projections de l'intersection*. Prenons le plan horizontal de projection, perpendiculaire à l'axe du cône, et faisons passer le plan vertical par cet axe, perpendiculai-

Fig. 37.

rement au plan donné, Alors les projections de l'axe seront le point s, situé sur la ligne de terre, et la perpendiculaire ss' à cette droite. En même temps, la section méridienne du cône, ou le contour apparent, relatif au plan vertical, sera le triangle isoscèle $as'c$. Il est évident qu'il n'y aura pas de contour apparent, relatif au plan horizontal, et que la base du cône sera la circonférence décrite sur ac comme diamètre. Pour plus de clarté dans l'épure, nous avons seulement tracé la partie de cette base, située en avant du plan vertical. Enfin, le plan sécant $\alpha\beta\gamma$ aura sa trace horizontale $\alpha\beta$, perpendiculaire à la ligne de terre.

108. Ces constructions préliminaires étant effectuées, on observera que la projection verticale de l'intersection est le segment $g'i'$ de la trace verticale $\beta\gamma$, compris entre les projections $s'a$, $s'c$ des génératrices extrêmes; en sorte que la projection horizontale seule est inconnue.

Pour la déterminer, on peut employer deux procédés principaux, qui se déduisent des deux modes suivant lesquels toute surface de révolution peut être engendrée (22, 8°).

En effet, soit M un point quelconque de la courbe d'intersection, ayant m' pour projection verticale. Par ce point M, on peut faire passer, soit un *méridien*, soit un *parallèle*.

Le méridien, c'est-à-dire la génératrice rectiligne passant en M, a pour projection verticale $s'm'd'$: sa projection horizontale s'obtient immédiatement, puisque cette génératrice a sa trace horizontale sur celle du cône. Quant au parallèle du point M, il a pour projection verticale la droite $k'l'$ parallèle à la ligne de terre; et il se projette en vraie grandeur, sur le plan horizontal, suivant la circonférence ghl. Chacune des deux méthodes donne ainsi, très-aisé-

ment, la projection horizontale *m* d'un point quelconque M de l'intersection. Cette ligne se projette donc suivant une courbe *gmi*... qui a pour *axe* la ligne de terre, et pour *sommets* les points *g*, *i*.

109. *Remarque*. Des deux procédés qui viennent d'être indiqués, le second, seul, est applicable à la détermination du point *h*, situé sur le méridien perpendiculaire au plan vertical de projection.

110. *Remarque*. Afin de rendre l'épure plus régulière, et surtout en vue des constructions ultérieures, on divise la demi-circonférence *abc* en un certain nombre de parties égales; et l'on emploie les génératrices passant par les points de division.

111. *Construction de la tangente*. Elle ne diffère pas de celle qui a été expliquée ci-dessus (95), et donne *mr* pour projection horizontale de cette ligne.

112. *Rabattement de l'intersection*. Pour cette partie de l'épure, que nous n'avons pas effectuée, nous renverrons le lecteur au Problème XI (99).

113. *Développement du cône*. Concevons que l'on ait inscrit, dans un cône, une série de pyramides dont les faces latérales diminuent indéfiniment, et qu'on ait développé les surfaces ainsi obtenues : la limite de ces développements sera ce qu'on appelle le développement de la surface conique (20).

Dans le cas qui nous occupe, le cône est droit, à base circulaire; par conséquent, son développement sera un secteur circulaire ASA_1A, dont le rayon SA sera la génératrice *as'*, et dont l'arc ABA_1 aura même longueur que la circonférence *abc* (84).

Fig. 38.

Pour obtenir cet arc, on pourrait se contenter de porter,

sur la circonférence à laquelle il appartient, à partir du point A, et les unes à la suite des autres, des cordes égales à celles qui sous-tendent les arcs *a*1, 12, 23... de la base du cône; mais il vaut mieux construire d'abord, à l'aide d'un *rapporteur*, l'angle ASA_1 (*); après quoi l'on partage l'arc ABA_1 en autant de parties égales qu'il y en a dans la circonférence *abc*.

En faisant passer des rayons par les points de division obtenus à l'aide de l'une ou de l'autre de ces deux méthodes, on aura les transformées des génératrices du cône.

114. *Transformée de l'intersection.* Les distances comprises entre le sommet du cône et les points où les génératrices sont rencontrées par le plan sécant, restent invariables, quand on développe la surface (84). Conséquemment, pour obtenir le *transformé* M du point (m, m'), il suffit de prendre, sur le rayon SD, la distance SM égale à celle Fig. 38.
qui sépare le point (m, m') du sommet (s, s'). Or, cette Fig. 37.
dernière distance est, évidemment, représentée par $s'k'$.

En répétant la même construction, on obtient la courbe $GMHIG_1$, *transformée de la section conique* (**).

(*) En désignant par R le rayon de la base du cône, par l le rayon du secteur, et par φ la *mesure* de l'angle ASA_1, c'est-à-dire l'arc qui correspond à cet angle, dans le cercle dont le rayon est *um*, on a $2\pi R = \varphi . l$, d'où $\varphi = 2\pi \frac{R}{l}$. D'un autre côté, $\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{n}{360}$, n étant le nombre de *degrés* de l'arc ABA_1. Donc $n = 360^\circ . \frac{R}{l}$.

Dans notre épure, R=46mm, l=79mm; en sorte que n=209,9. L'angle ASA_1 est donc d'environ 210°.

(**) On peut, de la manière suivante, trouver l'équation de la courbe $GMIG_1$.

Désignons par α l'angle $s'g'i'$ que fait le plan sécant avec la géné-

115. *Tangente à la transformée de la section conique.* Les considérations employées à propos du cylindre sont applicables ici, et l'on trouve, par leur moyen, que la tangente MR est l'hypoténuse du triangle RDM, dans lequel DR $= dr$.

116. *Nature de la section.* On peut démontrer, soit par des considérations purement géométriques, soit par le calcul, que la section faite par un plan P dans un cône de ré-

---

ratrice (as, as'), par β l'*angle $as's$ générateur du cône*, par θ la distance $g's'$. Faisons, en outre, $sm = u$, $asm = \theta$, SM $= \rho$, ASM $= \omega$.

Nous aurons d'abord, en exprimant que AD $= ad$, AS.$\omega = as.\theta$, ou, à cause de $as =$ AS $\sin\beta$:

$$\theta = \frac{\omega}{\sin\beta} \quad (1).$$

Le rayon vecteur sm est la projection horizontale de SM; donc

$$u = \rho \sin\beta \quad (2).$$

Exprimons maintenant que les distances kp, $k'm'$ sont égales. Or, $kp = u\,(1 - \cos\theta)$; et, dans le triangle $k'g'm'$,

$$\frac{k'm'}{\sin\alpha} = \frac{g'k'}{\sin m'} = \frac{d-\rho}{\cos(\alpha+\beta)}, \text{ d'où } k'm' = (d-\rho)\frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}.$$

Nous aurons donc, à cause de l'équation (2) :

$$\rho\,(1-\cos\theta)\sin\beta = (d-\rho)\frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta)} \quad (3),$$

puis
$$\rho = \frac{d\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta)\sin\beta + \sin\alpha - \cos(\alpha+\beta)\sin\beta\cos\frac{\omega}{\sin\beta}}.$$

Pour simplifier le dénominateur, observons que

$$\cos(\alpha+\beta)\sin\beta + \sin\alpha = \cos(\alpha+\beta)\sin\beta + \sin(\alpha+\beta-\beta) = \sin(\alpha+\beta)\cos\beta;$$

et nous aurons enfin

$$\rho = \frac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)\sin\beta\cos\frac{\omega}{\sin\beta}} \quad (4).$$

Telle est l'équation qui représente *les transformées des sections coniques*. Elle peut être mise sous la forme abrégée :

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\omega}.$$

volution, est une courbe du second degré, c'est-à-dire une *ellipse*, une *hyperbole*, ou une *parabole*. Dans l'exemple traité ci-dessus, le plan P coupait *toutes les génératrices*; et la courbe obtenue, située tout entière sur une seule nappe du cône, était une ellipse. Si, au contraire, le plan P rencontre les deux nappes de la surface, ou, ce qui est la même chose, s'il est *parallèle à deux génératrices*, la courbe d'intersection, évidemment composée de deux branches séparées et infinies, sera une hyperbole. Enfin, s'il arrive que le plan sécant soit *parallèle à une seule génératrice*, cette courbe, ayant une seule branche infinie, sera une parabole.

Il est intéressant de considérer à part le second cas, parce qu'il donne lieu à la construction des *asymptotes* de l'hyperbole.

117. *Cas où la section est une hyperbole.* Supposons, comme précédemment, que l'axe (o, oa') du cône soit situé dans le plan vertical de projection, perpendiculairement au plan horizontal; et, pour plus de régularité dans l'épure, limitons les deux nappes à deux plans horizontaux ab, $a''b''$, symétriquement placés à l'égard du sommet, ou plutôt du centre (o, o'). En même temps, prenons le plan P (toujours supposé perpendiculaire au plan vertical) de manière que les points (e, e'), (f, f'), où il rencontre les génératrices extrêmes (ab, ab''), $(ab, a''b)$, soient situés, l'un sur la nappe inférieure du cône, et l'autre sur la nappe supérieure. Fig. 39.

Au moyen de ces données, et en opérant comme dans l'épure précédente, nous obtiendrons, pour projection horizontale de l'hyperbole H suivant laquelle le plan P coupe le cône, l'hyperbole eg, fh.

118. *Construction des asymptotes.* Généralement, on *appelle asymptote à une courbe, la limite des positions d'une*

tangente dont le point de contact s'éloigne indéfiniment sur cette courbe. D'après cette définition, pour qu'une courbe ait une asymptote, il faut . 1° *que cette courbe ait une branche infinie;* 2° *que, le point de contact s'éloignant indéfiniment sur cette branche, la tangente s'approche sans cesse d'une position-limite.*

Il est facile de reconnaître que la courbe dont nous venons de construire la projection horizontale, satisfait à la première condition. En effet, menons, par le centre du cône, un plan $kk'l'$ parallèle à $\alpha\beta\gamma$; ce nouveau plan coupera la surface suivant des génératrices $(ko, k'l')$, $(lo, k'l')$ parallèles au plan $\alpha\beta\gamma$. Remplaçons, par la pensée, la droite $(ko, k'l')$ par une autre génératrice G, qui fasse, avec la première, un très-petit angle : il est clair que le point M où cette dernière ligne rencontre le plan $\alpha\beta\gamma$ de la courbe H peut s'éloigner, autant que nous le voudrons, du point (e, e'), si l'angle dont il s'agit est rendu suffisamment petit. C'est ce qu'il fallait prouver.

On voit, en même temps, que *les génératrices parallèles au plan sécant sont les limites de celles qui rencontrent ce plan.* Les considérations générales sur les surfaces développables nous avaient déjà conduit à cette conclusion (n° 45).

Remarquons maintenant que la tangente à la courbe H, au point M, serait l'intersection du plan P avec le plan tangent au cône, suivant la génératrice G. Si donc cette intersection s'approche indéfiniment d'une droite fixe, quand la génératrice G tend vers sa position-limite $(ko, k'l')$, cette droite fixe sera l'asymptote. Or, le plan tangent suivant la génératrice G a pour limite le plan tangent suivant $(ko, k'l')$; donc la tangente en M tend sans cesse à se confondre avec

la droite suivant laquelle ce dernier plan coupe le plan P; donc l'arc infini projeté suivant *eg* a une asymptote. La même conclusion subsisterait pour l'arc projeté en *fh*, et pour les deux arcs symétriques des premiers par rapport au plan vertical. La courbe H est donc une hyperbole, ainsi que l'avait indiqué la position du plan P.

119. Le plan tangent au cône, suivant (*ko*, *k'l'*), a pour trace horizontale la tangente *kp* à la base du cône : le point *p*, où cette tangente rencontre la trace $\alpha\beta$ du plan P, est donc la trace horizontale de l'asymptote. D'ailleurs, la génératrice (*ko*, *k'l'*) est parallèle au plan P; donc l'asymptote, intersection du plan P et du plan tangent, est parallèle à la génératrice : *sa projection horizontale est donc* pi, *parallèle à la projection horizontale* ko *de la génératrice-limite.*

120. Il résulte, du Théorème général sur la projection d'une tangente, que *la projection* pi *de l'asymptote à l'hyperbole* H *est asymptote à la projection* eg *de cette hyperbole.*

121. Une construction semblable à la précédente donnerait l'asymptote *qi* à l'arc *fh*. *Il faut*, comme vérification, *que les deux asymptotes se coupent au centre* (i, i') *de l'hyperbole* H. Cette remarque donne, évidemment, un moyen d'obtenir les deux asymptotes, plus rapide et plus exact que celui que nous venons d'employer.

122. Si le plan P, toujours perpendiculaire au plan vertical, était parallèle à la génératrice extrême (*ao*, *ao'*), auquel cas la section serait une parabole, la génératrice (*ko*, *k'o'*) se confondrait avec (*ao*, *ao'*). Par suite, le plan tangent suivant cette dernière droite ne couperait plus le plan P; donc *la parabole n'a pas d'asymptote.*

123. *Développement du cône; transformée de l'hyperbole.* Les deux nappes du cône étant, par hypothèse, limitées aux deux plans ab, $a''b''$, équidistants du centre, elles
Fig. 40. se développeront suivant deux secteurs BAB_1O, $A''B''A''_1O$, égaux entre eux; et que nous pourrons prendre dans un même cercle, ayant pour rayon le côté ao' du cône. Nous pouvons même les placer symétriquement à l'égard du centre O, ce qui revient à supposer que, la nappe inférieure
Fig. 39. du cône étant *ouverte* suivant la génératrice (bo, $b'o'$), la nappe supérieure soit ouverte suivant le prolongement de cette génératrice. De cette manière, la branche inférieure de l'hyperbole se transformera suivant GEG_1, et la transformée de la branche supérieure se composera des deux arcs FH, F_1H_1, symétriques par rapport à OB'', et coupant *orthogonalement* les deux transformées OA'', OA''_1 de la génératrice (oa, oa'').

Ces trois courbes GEG_1, FH, F_1H_1 se construiront par points, absolument comme la transformée de la section elliptique (113).

124. *Asymptote à la transformée de l'hyperbole.* Nous avons vu ci-dessus (115) que, pour obtenir la tangente en un point M_1 de la transformée d'une section conique quelconque, il faut construire un triangle égal au triangle formé, dans le plan de cette section, 1° par la tangente T au point M correspondant à M_1; 2° par la génératrice G passant en M; 3° par la trace horizontale du plan tangent le long de cette génératrice. Dans le cas qui nous occupe, les limites de ces trois droites sont, respectivement, l'asymptote
Fig. 39. (pi, $\beta i'$), la génératrice (ko, $k'o'$), et la tangente pk à la base du cône. Conséquemment, si après avoir construit la
Fig. 40. transformée KO de la génératrice (ko, $k'o'$), nous prenons

la tangente KP au cercle O égale à kp, et que nous menions PI parallèle à KO, nous aurons l'asymptote à l'arc EG de la transformée. Une considération semblable donnerait les asymptotes des autres arcs.

125. *Remarque.* Les asymptotes PI, R_1I des deux arcs EG, F_1H_1, forment une seule et même droite. En effet, d'après la construction, la transformée OK de la génératrice (ok, $o'k'$), et la transformée OL_1 du prolongement de cette même génératrice, sont deux segments d'une même droite. De plus, les asymptotes PI, R_1I sont parallèles à cette ligne; et, ainsi qu'il est aisé de le voir, elles en sont également distantes; donc, etc. Fig. 40.

On arrive à la même conclusion en supposant que l'on ait pris, pour *plan de développement*, celui qui touche le cône suivant la génératrice (ok, $o'k'$).

PROBLÈME XIII.

Trouver : 1° les projections de la section faite dans un cône, par un plan quelconque; 2° le développement du cône; 3° la transformée de la section; 4° les tangentes à la transformée de la base et à la transformée de la section.

126. *Projections de la section.* Soient (s, s') le sommet du cône, ($abcd$, $a'c'$) la trace horizontale de cette surface, et $\alpha\beta\gamma$ le plan donné. Fig. 41.

Nous déterminerons, comme dans les problèmes précédents, les projections $ehfg$, $e'h'f'g'$ de la courbe d'intersection, en construisant les points où le plan est rencontré par un certain nombre de génératrices du cône.

Soit, par exemple, la génératrice (sp, $s'p'$). Le plan qui la projette horizontalement coupe le plan $\alpha\beta\gamma$ suivant une droite dont la trace horizontale est (u, u'), et dont un autre

point a s pour projection horizontale. La projection verticale i' de ce dernier point se construit au moyen de l'horizontale (sl, $l'i'$) du plan donné. Nous obtenons ainsi $i'u'm'$ pour projection verticale de la droite dont il s'agit; et, par suite, (m, m') est le point où la génératrice (sp, $s'p'$) perce $\alpha\beta\gamma$.

127. *Remarque.* Les plans auxiliaires menés par les génératrices se coupent tous suivant la verticale passant par le sommet du cône; en sorte que leurs intersections avec le plan donné viennent toutes concourir au point (s,i'), où ce dernier plan est rencontré par la verticale dont il s'agit. Il nous a donc suffi, pour déterminer complétement chaque intersection, de prendre sa trace horizontale.

Cette importante simplification est tout à fait analogue à celle que nous avions rencontrée dans le Problème XI (95).

128. *Développement du cône.* La construction de cette partie de l'épure exige que l'on connaisse les vraies longueurs des génératrices projetées en s_1, s_2, sp... Nous obtiendrons commodément ces diverses droites si nous supposons que chacune d'elles tourne autour de la verticale (s, $s''s'$), de manière à se placer parallèlement au plan vertical.

Soit, par exemple, la génératrice (sp, $s'p'$). Si, sur la parallèle sv à xy, nous prenons $s\pi$ égale à sp; si nous abaissons πp_1 perpendiculaire à xy, et que nous menions $s'p_1$, cette dernière droite sera, évidemment, la vraie longueur de la génératrice.

Cela posé, pour obtenir le développement du cône, nous supposerons que cette surface est *ouverte* suivant la génératrice projetée en $s1$, et nous construirons, successivement, les triangles 1S2, 2SP, PS4..., égaux, respective-

Fig. 42.

ment, aux triangles composant les faces de la pyramide que nous substituons au cône. En faisant passer un trait continu par les points 1, 2, P, 4, D..., nous aurons, pour le développement cherché, le *secteur* S12P4D...1. En même temps, la courbe 12P4D...1 sera la transformée de la base du cône (*).

129. *Transformée de la section.* Si nous prenons, sur la transformée SP de la génératrice (sp, $s'p'$), une longueur SM égale à la partie de cette génératrice comprise entre le sommet du cône et le plan sécant, nous aurons un point M de la transformée HMFGH$_1$. Or, les distances SP, SM sont proportionnelles aux projections verticales $s'p'$, $s'm'$; et, de plus, SP$=s'p_1$. Si donc, par le point m', nous menons $m'm_1$ parallèle à la ligne de terre, cette droite $m'm_1$ coupera $s'p_1$ en un point pm_1 qui donnera $s'm_1$=SM. Fig. 42. Fig. 41.

130. *Remarque.* Il est commode de faire passer une courbe par les points $e_1g_1m_1h_1$, bien que cette ligne n'ait aucune signification géométrique. Fig. 41.

131. *Tangentes à la transformée de la base et à la trans-*

(*) On conçoit que l'ensemble des triangles 1S2, 2SP... peut différer beaucoup du véritable développement, puisque celui-ci est la limite des développements des pyramides inscrites au cône. D'un autre côté, si l'on multiplie considérablement le nombre des points de division de la base *abef*, on jette de la confusion dans l'épure. Pour éviter cet inconvénient, et en même temps pour obtenir une approximation satisfaisante, on peut opérer de la manière suivante.

Après avoir pris S1 (fig. 42) égale à $s'1$ (fig. 41), on décrit, du point S comme centre, avec $s'2$ (fig. 41) pour rayon, un arc $\lambda\mu$; puis on coupe cet arc par un autre arc, décrit du point 1 comme centre, et dont le rayon $\lambda'\mu'$, *plus grand* que la corde 12 (fig. 41), soit *plus petit* que l'arc sous-tendu par cette corde.

Quelle que soit, du reste, la construction qui donne le développement, elle laissera toujours à désirer sous le rapport de la rigueur.

formée de la section. Après avoir déterminé, par la construction ordinaire, la tangente (mr, $m'r'$) à la courbe d'intersection, au point quelconque (m, m'), proposons-nous d'obtenir la tangente MR à la transformée de cette courbe; et, pour cela, cherchons d'abord la tangente en P, à la transformée de la base du cylindre. Or, si nous construisons
FIG. 42. le triangle SPR égal à celui dont les côtés seraient la génératrice (sp, $s'p'$), la tangente pr à la base, et la droite (rs, $r's'$), le côté PR de ce triangle touchera, en P, la transformée de la base, etc.

articulières,
tous complé-
ouvrage, la
cée dans les

ble est le lieu
e. Cette défi-
es dont nous
une manière
e rectiligne.
CF, tangente Fig. 43.
r celle-ci, de
la droite, fût
urait pas de
uer à la tan-
lieu qu'elle
rposées, etc.
pour qu'elle
c que la tan-
une certaine

134. Considérons d'abord, comme dans le Chapitre Ier
Fig. 44. (16), un polygone ABC...FG, dont trois côtés consécutifs quelconques ne soient pas dans un même plan.

Prolongeons indéfiniment, *et dans les deux sens*, chacun des côtés de cette figure ; nous obtiendrons ainsi des droites qui pourront être regardées comme les arêtes de deux surfaces polyédrales, ou plutôt de deux nappes, appartenant à une même surface, et s'appuyant sur le contour polygonal ABC...FG.

Pour engendrer cette surface par le moyen d'une droite mobile D, imaginons que B″B′ soit une position de cette génératrice. Pour lui faire prendre la position C″C′, nous la ferons tourner autour d'un axe Bβ mené par le point B, perpendiculairement au plan ABC ; pendant le mouvement, les deux segments de la génératrice engendreront les angles B″BC″, B′BC′. De même, cette droite passera de la position C″C′ à la position D″D′ en tournant autour d'un axe Cγ mené par le sommet C, perpendiculairement au plan BCD. Et ainsi de suite.

Nous voyons ainsi que les deux nappes de la surface polyédrale seront engendrées par les rotations successives d'une même droite, autour des axes Bβ, Cγ, Dδ...

Fig. 44. 135. *Remarques.* 1° Si nous prenons, sur B″B′, les segments BC_1, C_1D_1, D_1E_1..., respectivement égaux aux côtés BC, CD, DE... du polygone, ces segments viendront, successivement, coïncider avec les côtés correspondants du polygone directeur.

2° Un point M, pris sur B″B′, entre C_1 et D_1, décrit d'abord un arc de cercle MM_1 autour de B, puis un arc M_1m autour de C, puis un autre arc mM_2 autour de D, etc. Ainsi, *chaque point de la génératrice décrit une ligne com-*

elle est tou-

m et mM_1,

D′ des plans

spectivement

ur angle me-

ite, *la ligne*

e D *forme un*

ABCD...FG.

ints quelcon-

ngueur, à la

les positions

propriété que

n disant que

urface engen-

ngente à une

principe des Fig. 45.

s, nous pour-

uivantes :

ositions d'une

rbe à double

a génératrice

normale; en

THOGONALE *de*

rices présente

ectrice.

deux lignes Fig. 44.

Pm, Qm, a une limite nulle. C'est parce que la directrice est le lieu des points de rebroussement des courbes décrites par les points de la génératrice, qu'elle est appelée *arête de rebroussement* de la surface.

4° *La directrice donnée, ou l'arête de rebroussement de la surface développable, partage cette surface en deux nappes tangentes l'une à l'autre le long de cette arête.*

Les tangentes mT, ms à ces deux courbes, déterminent les plans tangents aux deux nappes; donc, etc.

137. Si la surface polyédrale considérée ci-dessus est
Fig. 44. développée sur un plan, le polygone ABC...EFG se transforme en un autre polygone dont les angles et les côtés sont, respectivement, égaux aux angles et aux côtés du premier (82). Il résulte de là que les circonférences qui passeront, l'une par trois sommets consécutifs du premier polygone, et l'autre par les trois sommets correspondants du second, sont égales entre elles. Or, si nous remplaçons les deux figures polygonales par les courbes qui en sont les limites, les deux circonférences seront *osculatrices* à ces deux courbes. Ainsi, *l'arête de rebroussement d'une surface développable et la transformée de cette ligne ont, en deux points correspondants, leurs cercles osculateurs égaux.*

138. Le plan du cercle osculateur, en un point M de
Fig. 46. l'arête de rebroussement, est, évidemment, la limite du plan conduit suivant les deux cordes Mm_1, Mm_2 aboutissant en ce point. En d'autres termes, *le plan osculateur en un point de l'arête de rebroussement se confond avec le plan tangent, en ce point, à la surface développable.* C'est ce que nous avions annoncé précédemment (47).

139. Les axes de rotation $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$..., que nous

les normales

ux plans os-

de ces nor-

mpléter ces

l'aide des-

able. Le lec-

e Géométrie

s de donner

s on pourra,

ce *réglée* est

me suivant.

ligne plane

droite.

, au moins,

is dans *l'in-*

B et par les

r une droite

que C de la

la tangente

dmet une di-

dénomination

Fig. 47.

Admettons, pour un instant, que sur une surface développable S, ayant la courbe à double courbure ABC... pour arête de rebroussement, on puisse appliquer une droite MN, non tangente à cette courbe. Projetons toute la figure sur un plan P, perpendiculaire à MN.

L'arête de rebroussement se projettera suivant une ligne *abc*... ayant pour tangentes les projections *aa'*, *bb'*, *cc'*... des génératrices AA', BB', CC'... De plus, la droite MN se projettera en un point *m*, par lequel viendront passer les tangentes *aa'*, *bb'*, *cc'*... Donc, d'après le lemme précédent, *abc*... serait une ligne droite, et, contrairement à l'hypothèse, la courbe ABC serait plane.

144. Par le calcul, ou par la géométrie, on démontre que *l'hyperboloïde à une nappe* est une surface *doublement réglée*, ou admettant *deux systèmes* de génératrices rectilignes. Le *paraboloïde hyperbolique* jouit de la même propriété. D'après le théorème précédent, ces deux surfaces sont gauches. La même conclusion s'étend aux *conoïdes*, c'est-à-dire aux surfaces engendrées par une droite qui s'appuie sur une droite donnée, en restant parallèle à un *plan directeur* donné. A cause de cette dernière condition, les conoïdes peuvent être considérés comme appartenant aux *surfaces réglées, à plan directeur*. Ces dernières, quand elles ne sont pas cylindriques, sont nécessairement gauches, comme nous l'allons démontrer.

145. Théorème. *Toute surface réglée, à plan directeur, est gauche.*

Supposons qu'une pareille surface soit développable. Si nous effectuons une projection sur un plan perpendiculaire au plan directeur, les génératrices se projetteront suivant des droites parallèles, tangentes à la projection de l'arête

[illegible] montré plus [illegible] toutes ses [illegible]

[illegible] ose que l'a- [illegible] *l'infini*, ou, [illegible] ylindrique.

[illegible] s tangentes [illegible] s propriétés [illegible] *perpendicu-* [illegible] *l'hélice est* [illegible] *te de la sec-*

[illegible] *tangente est* [illegible] ent, *l'hélice* [illegible] priété précé-

[illegible] *anière à en-* [illegible] *es points dé-* [illegible] *cylindre sur*

[illegible] te roule sur [illegible] g de celle-ci, [illegible] riable sur la [illegible] mode de gé- [illegible] itions qu'elle [illegible] *indéfinie*, les [illegible] Cela posé, si [illegible] n, *tout point*

de la génératrice décrit une hélice dont le pas est égal à celui de l'hélice primitive.

Pour démontrer cette proposition, projetons l'hélice donnée sur un plan perpendiculaire aux génératrices du cylindre. Partageons la circonférence O en un certain nombre de parties égales, par exemple, en sept. Menons les cordes AB, BC... : il est clair que ces droites seront les projections de cordes égales, ayant leurs extrémités sur l'hélice. Si nous prolongeons ces cordes des quantités A*a*, B*b*, C*c*... arbitraires, mais toutes égales entre elles, les points *a*, *b*, *c*... seront les projections de points situés sur les prolongements des côtés du polygone inscrit dans l'hélice, et équidistants des sommets projetés en A, B, C... Enfin, menons les droites *ab*, *bc*... Il est bien facile de voir que ABC... étant, par hypothèse, un polygone régulier, il en sera de même pour *abc*... On reconnaît, en outre, que le polygone dont *abc*... est la projection, a ses côtés égaux entre eux et également inclinés sur le plan de projection; si donc on développait le prisme dont *abcd*... est la base, le polygone dont il s'agit aurait une *transformée rectiligne*. Cette conclusion est indépendante du nombre des divisions de la circonférence ABC...; donc, etc.

Fig. 48.

150. *Remarque.* Si le polygone ABC... n'est pas, à la fois, *équiangle et équilatéral*, c'est-à-dire *si l'hélice directrice n'est pas tracée sur un cylindre de révolution*, le théorème ne subsistera plus, et *chacun des points de la génératrice décrira une courbe qui ne sera pas une hélice*. Cette proposition, comme le lecteur pourra s'en assurer, résulte de la démonstration précédente.

151. Après ce rapide examen de la surface qui nous occupe, nous pourrions faire voir comment on peut la con-

struire en *relief*, et comment on peut effectuer son développement. Pour éviter un double emploi, nous traiterons ces deux questions dans le chapitre suivant.

HÉLIÇOÏDE GAUCHE.

152. On donne, en général, ce nom à toute *surface gauche à directrice héliçoïdale*. Mais on peut considérer plus particulièrement, à cause de leurs applications, les quatre héliçoïdes gauches suivants :

1° Prenons, pour directrices, une hélice tracée sur un cylindre de révolution, et l'axe de ce cylindre. Si une droite mobile s'appuie sur ces deux lignes, en faisant avec l'axe un angle constant, la surface qu'elle engendrera sera *l'héliçoïde de la vis à filet triangulaire*.

2° Conservons les mêmes directrices, et supposons que la droite mobile coupe l'axe à angle droit, ou, ce qui est équivalent, qu'elle reste parallèle à un *plan directeur*, perpendiculaire à cet axe. La surface engendrée sera ce qu'on appelle *héliçoïde à plan directeur*, ou *héliçoïde de la vis à filet carré*.

3° Prenons encore pour directrice une hélice tracée sur un cylindre de révolution, et supposons qu'une droite mobile s'appuie sur cette hélice, en touchant la surface du cylindre, et en faisant avec l'axe un angle constant, différent de celui que fait, avec cet axe, la tangente à l'hélice. Le mouvement de la génératrice sera complétement déterminé. De plus, la surface n'aura *aucun point dans l'intérieur du cylindre*. On pourra donc la désigner sous le nom d'*héliçoïde à noyau plein*.

4° En admettant toujours que la génératrice rectiligne

rencontre l'hélice en demeurant tangente au cylindre sur lequel cette courbe est tracée, supposons, comme cas particulier, que la génératrice fasse un angle droit avec l'axe; alors la surface engendrée sera un *héliçoïde à noyau plein, et à plan directeur*.

D'après les deux Théorèmes généraux démontrés ci-dessus (143 et 145), les deux premiers héliçoïdes, et le quatrième, sont des surfaces gauches.

153. Une considération très-simple permet de reconnaître que l'*héliçoïde à noyau plein* appartient, pareillement, à cette catégorie. Projetons l'hélice et les génératrices sur un plan P, perpendiculaire à l'axe du cylindre. Nous obtiendrons, pour projection de la courbe, la circonférence C suivant laquelle le plan P coupe le cylindre, et, pour projections des génératrices, les tangentes à cette circonférence. Si la surface réglée dont il s'agit avait une arête de rebroussement, la projection de cette ligne serait l'enveloppe de toutes nos tangentes, c'est-à-dire la circonférence C. Par suite, les points de contact des génératrices avec l'arête de rebroussement se confondraient avec les points où les génératrices rencontrent l'hélice. En d'autres termes, si la surface était développable, son arête de rebroussement serait précisément l'hélice directrice. Cette conclusion est contraire à l'hypothèse; donc *l'héliçoïde à noyau plein est une surface gauche*.

154. En général, *si une droite se meut en coupant une courbe donnée, de manière que la projection de la génératrice, faite sur un certain plan, soit toujours tangente à la projection de la directrice; la surface engendrée sera gauche*.

HYPERBOLOÏDE DE RÉVOLUTION.

155. Supposons, comme dans le Problème VII, qu'une droite AB tourne autour d'un axe fixe OZ, non situé dans un même plan avec elle. Nous avons dit que *la surface gauche de révolution* ainsi engendrée est identique avec l'*hyperboloïde de révolution à une nappe*, c'est-à-dire avec la surface qui serait décrite par une demi-hyperbole, tournant autour de son axe non transverse. Fig. 49.

Pour démontrer cette identité, menons la commune perpendiculaire OC aux droites AB, OZ. Quand la génératrice AB tournera autour de OZ, le point C décrira un parallèle plus petit, évidemment, que les parallèles décrits par les autres points de AB. Pour cette raison, le cercle OCD est appelé *cercle de gorge* de la surface.

Soit ensuite ZOX un plan méridien quelconque, et soit M le point où il est rencontré par la génératrice. Si nous abaissons MP perpendiculaire sur OX, et que nous menions CP, cette dernière droite sera tangente en C au cercle de gorge: en effet, la droite AB étant perpendiculaire à OC, sa projection CP est pareillement perpendiculaire à OC. Ainsi, *les projections des génératrices, sur le plan du cercle de gorge, sont tangentes à ce cercle.*

Ces préliminaires étant entendus, faisons

$$OC = \delta, \quad MCP = \alpha, \quad OP = x, \quad MP = z.$$

Le triangle MPC, rectangle en P, donne $z = CP \operatorname{tg} \alpha$. D'ailleurs, $CP = \sqrt{x^2 - \delta^2}$; donc l'équation du lieu des points M, ou de la section méridienne, est

$$z^2 - x^2 \operatorname{tg}^2\alpha = -\delta^2 \operatorname{tg}^2\alpha \quad (1).$$

Cette équation représente une hyperbole dont le centre

se confond avec celui du cercle de gorge, dont les sommets réels sont les extrémités D, E d'un diamètre de ce cercle, et dont OZ est l'axe imaginaire.

156. L'équation (1) ne change pas quand α change de signe. Conséquemment, si l'on imagine une droite A'B', symétrique de AB relativement au plan du cercle de gorge, cette seconde génératrice A'B', tournant autour de OZ, reproduira la surface engendrée par AB. Autrement dit, *l'hyperboloïde de révolution, à une nappe, admet deux systèmes de génératrices rectilignes. A chaque génératrice du premier système, il en correspond une du second, symétrique de la première par rapport au plan du cercle de gorge.*

157. L'hyperboloïde pouvant être engendré, indifféremment, par la droite AB ou par la droite A'B', il est clair que : *par tout point pris sur la surface, passent deux génératrices, l'une appartenant au premier système, et l'autre appartenant au second.*

158. *Deux génératrices quelconques, appartenant à un même système, ne sont jamais dans un même plan.*

Fig. 50. Soient AB, A'B' deux positions quelconques d'une même génératrice. En général, les tangentes CT, C'T, suivant lesquelles se projettent ces deux droites, se couperont en un point T. Si donc AB pouvait rencontrer A'B', ce ne pourrait être qu'en un point de la droite MTM', menée par le point T, perpendiculairement au plan du cercle de gorge. Or, à l'inspection de la figure, on voit que cette perpendiculaire rencontre AB *au-dessus* de ce plan, et qu'elle rencontre A'B' *au-dessous* de ce même plan. Les deux génératrices sont donc dans des plans différents.

159. *Remarque.* Si les deux droites AB, A'B' avaient

[illegible] raient anti-

[illegible] à l'un des

[illegible] s appartenant

[illegible] r système; Fig. 50.

[illegible] arbitraire-

[illegible] ge, suivant

[illegible] e point T,

[illegible] cercle : il

[illegible] même point,

[illegible] s rectangles

[illegible] génératrices,

[illegible] aux; car les

[illegible] et les tan-

[illegible] sont égales

[illegible] FR rencontre

[illegible] ce qu'il fal-

[illegible] EF avaient

[illegible] ces seraient

[illegible] mais *elles se-*

[illegible] mouvement

[illegible] déterminé,

[illegible] sur trois di-

[illegible] prenons, sur

[illegible] A′, A″ d'un

[illegible] ne droite G,

[illegible] trois direc-

trices, nous engendrerons une surface qui ne différera pas de l'hyperboloïde. En effet, la génératrice G, dans ses diverses positions, coïncidera avec les droites B, B′, B″, B‴... du second système, attendu que chacune de celles-ci rencontre A, A′, A″. Ainsi, *l'hyperboloïde de révolution, à une nappe, peut être engendré par une droite mobile, assujettie à s'appuyer sur trois droites fixes* (*).

163. La construction du plan tangent à l'hyperboloïde de révolution, a fait voir que cette surface est gauche (69). Les théorèmes des nos 143 et 154 conduisent à la même conclusion.

164. On a vu plus haut (157) que, par tout point de la surface, passent deux génératrices. Conséquemment (34), 1° *le plan tangent en un point de l'hyperboloïde de révolution, est déterminé par les deux génératrices passant en ce point;* 2° *quand le point de contact se déplace sur une génératrice, le plan tangent tourne autour de celle-ci.* Ce dernier résultat était déjà connu (44 et 69).

165. Reportons-nous à la figure 49, et menons, par le *centre* O de l'hyperboloïde, une parallèle OH à la génératrice AB. La droite OH, en tournant autour de l'axe OZ, engendrera un cône de révolution identique avec celui que décrirait l'asymptote de l'hyperbole méridienne MDM′. En effet, pour obtenir la section méridienne du premier cône, il suffit de supposer, dans l'équation (1), $\delta = o$. On obtient ainsi $z^2 - x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = o$, c'est-à-dire l'équation même des deux asymptotes.

(*) Il faut, bien entendu, que les trois directrices satisfassent à certaines conditions, sans quoi la surface engendrée pourrait n'être pas un hyperboloïde de révolution.

[illegible] à AB, il est [illegible] *parallèle à* [illegible] *quement.*

[illegible] *a surface de* [illegible] *le du cône,* [illegible] dernière sur- [illegible] *de.*

[illegible] *an, dans un* [illegible] *ne asympto-* [illegible] *lement pla-* [illegible] *hyperboles,* [illegible] l'on peut dé- [illegible] ment.

CHAPITRE VII.

Sections planes des surfaces réglées.

168. Dans le chapitre suivant nous considérerons les cas principaux de la section plane d'un hyperboloïde de révolution. Dans celui-ci, nous choisirons, comme exemples, les sections faites dans l'héliçoïde développable ou dans l'héliçoïde de la vis à filet triangulaire, par des plans tangents à ces surfaces.

PROBLÈME XIV.

1° Représenter graphiquement l'héliçoïde développable; 2° construire un plan tangent à cette surface; 3° déterminer la section faite par ce plan; 4° développer l'héliçoïde; 5° construire la transformée de la section.

Fig. 51. 169. *Représentation graphique de l'héliçoïde.* Nous supposerons la surface terminée à deux plans horizontaux xy, $x'y'$, perpendiculaires à l'axe $(o, o'z')$ du cylindre sur lequel est tracée l'hélice directrice. La distance de ces deux plans sera, pour plus de simplicité, égale au *pas* de cette hélice. De plus, nous limiterons la courbe à ces deux plans; de sorte qu'elle se composera d'une seule *spire*, et que la surface sera terminée, brusquement, par les tangentes aux extrémités de cet arc héliçoïdal.

Cela posé, si $a\delta\theta\lambda$ est la trace horizontale du cylindre, et que a soit l'*origine* de l'hélice, la trace horizontale de l'héliçoïde sera la développante $abcd...qr$ du cercle o (93). Pour construire cette développante, on divise la circon-

les, à partir

ints de divi-

es points de

spectivement

Les points b,

la dévelop-

gale à l'ab-

ente au point

vant la droite

équent aussi,

points où les

r $x'y'$, il nous

ections de ces

is obtiendrons

évidemment,

$_1b_1c_1 \ldots q_1a$ du

ux plans hori-

oppante de la

nte de sa base

---

d..., on prend la

cette droite en au-

conférence; puis

d, etc.

γ, δ..., et les tan-

ntre, une circon-

cette grande cir-

x points de divi-

par toutes sortes

ation des droites

supérieure; ces deux courbes étant, d'ailleurs, dirigées en sens contraires.

171. Si l'hélice donnée, au lieu d'être terminée aux deux plans $x'y'$, xy, était prolongée au-dessous de xy, les tangentes à la spire qui suivrait celle que nous conservons, viendraient percer le plan horizontal xy en des points situés sur la développante $a_1q_1p_1...b_1a_1$. En effet, la nouvelle spire serait, à l'égard du plan xy, ce que la première est par rapport au plan $x'y'$.

De même, si celle-ci était continuée au-dessus de ce dernier plan, les tangentes à la nouvelle spire détermineraient, par leurs intersections avec $x'y'$, une développante projetée, en vraie grandeur, suivant $abc...qr$.

Si donc l'héliçoïde, au lieu d'être limité comme nous l'avons supposé, était indéfini, ses traces sur chacun des deux plans horizontaux xy, $x'y'$, se composeraient du système de deux développantes telles que $abc...qr$ et $aq_1p_1...a_1$.

172. Nous pouvons remarquer maintenant qu'*une hélice tracée sur un cylindre de révolution est partout identique avec elle-même* (*). La conclusion à laquelle nous venons de parvenir, relativement aux sections faites dans l'héliçoïde par les plans horizontaux xy, $x'y'$, subsistera donc pour tout plan horizontal. Ainsi, 1° *la section faite dans l'héliçoïde développable, par un plan quelconque, perpendiculaire à l'axe du cylindre sur lequel l'hélice directrice est tracée, se compose de deux développantes de la section circulaire faite dans le cylindre par ce même plan;* 2° *l'origine commune des deux développantes est située sur l'hé-*

(*) Cette propriété appartient aussi à la ligne droite.

ne des deux

présenter la

. $qab_1 \ldots qr$,

l'axe du cy-

que le point

D'après les

endrée sera

omposée de

es deux dé-

une sorte de

ctrice. Cette

de rebrous-

e rebrousse-

ore plus évi-

e, d'après le

véritable *vis*,

système des

ue de l'héli-

jetteront en

e, les points

---

les tangentes à

oppantes, sont

dire que, par

t de rebrous-

, passant par

appartenant à la trace supérieure de l'héliçoïde auront pour projections verticales les points a'_1, b'_1, c'_1, ...q'_1, situés sur $x'y'$. Par conséquent, en menant des droites par les points correspondants r' et a'_1, b' et b'_1, ...q' et q'_1, nous obtiendrons les projections verticales des génératrices. Quant aux projections verticales β', γ', δ',.. des points où ces génératrices touchent l'hélice, elles seront données par les projections horizontales β, γ, δ... des mêmes points. La *sinusoïde* $r'\beta'\gamma'\delta'...a'_1$ sera la projection verticale de cette hélice (*).

176. Afin d'abréger, nous n'expliquerons pas ce qui est relatif aux parties visibles ou invisibles. Avec un peu d'attention, le lecteur qui aura notre épure sous les yeux comprendra pourquoi certaines lignes ou parties de lignes sont *en plein*, tandis que le reste est en *ponctué*.

177. Pour construire le *modèle en relief*, on pourra prendre deux feuilles de carton, assujetties par des montants verticaux, de manière à tenir lieu, approximativement, des plans horizontaux xy, $x'y'$. Après avoir évidé ces deux feuilles, suivant deux cercles égaux à $a\delta\theta\lambda$, et ayant un axe commun (o, $o'o'_1$), on tracera, sur le carton inférieur,

---

(*) Rapportons l'hélice aux trois axes $o\xi$, $o\delta$, (o, $o'z'$). Désignons par R le rayon du cylindre, et par s l'arc $a\delta_1$, répondant à un point quelconque (ε, ε'), dont les coordonnées sont x, y, z. Nous aurons

$$x = -\mathrm{R}\cos\frac{s}{\mathrm{R}},\quad y = \mathrm{R}\sin\frac{s}{\mathrm{R}}.$$

Mais $\frac{z}{s} = \frac{z}{o\varepsilon} = \operatorname{tg} d'_1d'l' = \frac{h}{2\pi\mathrm{R}}$, h étant le pas de l'hélice. Remplaçant $\frac{s}{\mathrm{R}}$ par $2\pi\frac{z}{h}$, nous obtiendrons, pour les équations de la courbe :

$$x = -\mathrm{R}\cos 2\pi\frac{z}{h},\quad y = \mathrm{R}\sin 2\pi\frac{z}{h}.$$

Chacune des projections de l'hélice est donc une *variété* de la sinusoïde.

[illegible] arton, l'autre
[illegible] ne même ver-
[illegible] unissant en-
[illegible] pondants, on
[illegible] oïde dévelop-
[illegible] suffisamment
[illegible] génératrices
[illegible] troites mathé-
[illegible] eux, et qu'a-
[illegible] *intersections*
[illegible]
[illegible] *e*. Proposons-
[illegible] oïde, le long Fig. 51.
[illegible] ir, pour trace
[illegible] pante *abc...r*,
[illegible] de la surface.
[illegible] (172, note);
[illegible]
[illegible] re, la généra-
[illegible], le plan tan-
[illegible] plan, et il aura
[illegible] énératrice.
[illegible] *plan tangent*.
[illegible] t de chercher
[illegible] ératrices pro-
[illegible] verticales de
[illegible] ; en sorte que
[illegible] rojections ho-
[illegible] ront la courbe
[illegible] ection.

[illegible] ne s'appliquerait

180. Il ne serait ni difficile ni intéressant de construire, soit le rabattement de la section, soit la tangente à cette ligne. Relativement au point (λ, λ'), la méthode générale serait en défaut, car le plan tangent à la surface en ce point se confond avec le plan de la courbe. Mais nous savons que celle-ci touche, au point dont il s'agit, l'arête de rebroussement (45) (*).

---

pas aux points a_2, g_2, r_2, situés sur les droites aa_1, gg_1, ar, perpendiculaires à la ligne de terre. Mais il est facile de voir que la projection verticale g'_2 partage $g'g'_1$ en deux segments $g'_2g'_1$, $g'g'_2$, proportionnels à gg_2, g_2g_1. On pourra donc construire rigoureusement le point g_2. De même pour a_2 et r_2.

(*) Tous les résultats auxquels nous venons de parvenir peuvent être vérifiés par le calcul.

Soient, comme ci-dessus, les équations de l'hélice :

$$x = -R\cos 2\pi\frac{z}{h},\quad y = R\sin 2\pi\frac{z}{h}.$$

La tangente en un point de cette courbe sera représentée par

$$x + R\cos 2\pi\frac{\gamma}{h} = \frac{2\pi R}{h}(z-\gamma)\sin 2\pi\frac{\gamma}{h},$$

$$y - R\sin 2\pi\frac{\gamma}{h} = \frac{2\pi R}{h}(z-\gamma)\cos 2\pi\frac{\gamma}{h};$$

γ étant l'ordonnée du point de contact.

Pour simplifier, posons $\frac{h}{2\pi R} = m$: ce rapport sera égal à la tangente trigonométrique de l'angle que fait, avec le plan horizontal, la tangente à l'hélice. Nous aurons ainsi, au lieu des équations précédentes :

$$x + R\cos\frac{\gamma}{Rm} = \frac{1}{m}(z-\gamma)\sin\frac{\gamma}{Rm}, \qquad (1)$$

$$y - R\sin\frac{\gamma}{Rm} = \frac{1}{m}(z-\gamma)\cos\frac{\gamma}{Rm}. \qquad (2)$$

Il ne reste plus, pour avoir l'équation de l'héliçoïde, qu'à éliminer γ entre les relations (1) et (2). Elles donnent, par des combinaisons simples,

$$x\cos\frac{\gamma}{Rm} - y\sin\frac{\gamma}{Rm} + R = o, \quad (3) \qquad x^2+y^2-R^2 = \left(\frac{z-\gamma}{m}\right)^2. \quad (4)$$

[illegible] théorème dé-
[illegible] te ci-dessus
[illegible] l'héliçoïde,
[illegible] rence égale
[illegible] nc, d'abord,

[illegible] ts M, P, N, Fig. 52.
[illegible] sser le plan
[illegible] oisissons le
[illegible] serait par le
[illegible] 1, PN seront

[illegible] pour la substi-

[illegible] $-R^2\Big)+R=o.$ (5)

[illegible] la simplifierait
[illegible] olaires.

[illegible] $R=o,$ (6)

[illegible] dans le plan

[illegible] e qui précède,

[illegible] x, ou

[illegible] nt, après quel-

[illegible] $+R=o.$ (7)

[illegible] donc la droite

projetées, horizontalement, suivant deux cordes égales de la section droite o, et, verticalement, suivant une seule droite $m'p'n'$.

Cela posé, si l'on considère la circonférence passant par M, N, P, on voit qu'elle aura $m'n'p'$ pour projection verticale, et que son diamètre projeté en p' sera l'hypoténuse d'un triangle ayant PN pour côté de l'angle droit, et ip pour segment adjacent. Si donc D est ce diamètre, on aura $D=\frac{\overline{PN}^2}{pi}$. D'ailleurs, le triangle rectangle pnc donne, semblablement, $cp=\frac{\overline{pn}^2}{pi}$. Divisant membre à membre, et représentant par β l'angle de PN avec le plan horizontal, on obtient

$$\frac{D}{2R}=\frac{1}{\cos^2\beta}.$$

Lorsque le point N s'approche indéfiniment de P, β tend à devenir égal à l'angle α que fait, avec le plan horizontal, la tangente à l'hélice. En même temps, le diamètre D diffère, de moins en moins, du diamètre 2ρ du cercle osculateur o; la formule cherchée est donc

$$\rho=\frac{R}{\cos^2\alpha}.$$

182. Pour construire cette valeur, prenons, sur la ligne
Fig. 51. de terre, $l's=ao=R$; élevons st perpendiculaire à xy; puis, par le point t, menons tu perpendiculaire à $l'l$: $l'u$ sera égale au rayon ρ. En effet, l'angle $d'l'l'_1$ est égal à α; donc $tl'=\frac{R}{\cos\alpha}$ et $l'u=\frac{R}{\cos^2\alpha}$.

183. Avec le rayon ρ, égal à $l'u$, décrivons une circonférence AO (fig. 53), sur laquelle nous prendrons, à partir du point A, un arc $A\delta_1\theta_1\lambda_1A_0$ égal, en longueur, à la géné-

opement de
. En le di-
e le nombre
ant des tan-
ous aurons
e.

te $a_1b_1 \ldots q_1a$
la tangente
A_1, comme
sur les tan-
β_1B_1, γ_1C_1,
$\mathfrak{Z}A_1$... La
a la trans-
on de plan
de la nappe

n porte, sur
A_2R, la dé-
, semblable-
$bc \ldots qr$; etc.
obtenu, pour

---

si l'on calcule
angle (voyez la
. A cause de
, en représen-
$360^\circ . \cos \alpha$. Le
te que l'angle

projection horizontale de la courbe d'intersection de l'héli-
Fig. 51. çoïde par son plan tangent $l_1l'l$, la ligne $a_2b_2...\lambda...r_2$. Si nous considérons les portions de génératrices projetées suivant a_1a_2, $b_1b_2...$, il est clair qu'elles sont proportionnelles à ces projections, attendu que les génératrices sont également inclinées sur le plan horizontal. Par suite, nous
Fig. 53. déterminerons les vraies longueurs A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2,... de ces portions de génératrices, en cherchant les hypoténuses d'une série de triangles rectangles ayant un angle égal à $l'_1l'x$, et dans lesquels les côtés adjacents à cet angle seraient égaux, respectivement, à a_1a_2, $b_1b_2...$ Nous avons, dans l'épure, supprimé cette construction auxiliaire, laquelle donne $A_2B_2...\lambda_1...R_2$ pour la transformée cherchée.

PROBLÈME XV.

1° Représenter graphiquement l'héliçoïde de la vis à filet triangulaire; 2° construire le plan tangent à cette surface, en un point; 3° déterminer la section faite par ce plan.

186. *Représentation graphique de l'héliçoïde.* Après avoir
Fig. 54. divisé en parties égales la circonférence ao, projection horizontale de l'hélice directrice, partageons, dans le même nombre de parties égales, le pas $o'o''$ de cette courbe; puis, par les points de division, menons des parallèles à la ligne de terre xy, et arrêtons-les aux perpendiculaires à cette ligne, menées par les points de division β, γ, δ... : nous obtiendrons ainsi la sinusoïde (*) $a'\beta'\gamma'\delta'...a'$, projection verticale de l'hélice.

(*) On a déjà vu que $a'\beta'\gamma'\delta'...a'$ n'est pas une sinusoïde proprement dite, mais seulement une variété de cette courbe.

Cela posé, la génératrice rectiligne de l'héliçoïde, assujettie à s'appuyer sur l'hélice dont nous venons de construire les projections, doit couper, sous un angle constant, l'axe (o, $o'o''$) du cylindre ao (152). D'après cette condition, on se représentera très-exactement la surface, si l'on imagine une *équerre* BAC, dont le côté BA de l'angle droit coïncide avec l'axe, et dont l'autre côté AC de l'angle droit, égal au rayon du cylindre, tourne autour de cet axe, de manière que le sommet C parcoure l'hélice. Dans ce mouvement, l'hypoténuse BC de l'équerre engendrera la portion de surface héliçoïdale comprise entre les deux directrices; et, si cette hypoténuse est indéfiniment prolongée, elle engendrera tout l'héliçoïde.

187. La même considération démontre que *deux points quelconques, pris* sur l'hypoténuse de l'équerre, c'est-à-dire *sur la génératrice, s'élèvent, à la fois, de quantités égales.* En particulier, *la différence de niveau entre les points* B, C *est constante.* Enfin, comme les arcs parcourus, dans le même temps, par les projections horizontales de deux points quelconques de la génératrice, sont, évidemment, semblables, ces deux points décrivent, dans l'espace, deux hélices de même pas. En d'autres termes, *quand la génératrice rectiligne engendre l'héliçoïde, tout point de cette droite décrit une hélice dont le pas est égal à celui de l'hélice donnée* (*).

188. Pour construire les projections verticales des génératrices passant par les points de division choisis sur l'hélice, nous devrons porter sur $o'o''$, à partir des points Fig. 54.

(*) Si la démonstration de cette dernière proposition ne paraissait pas suffisamment claire, on la compléterait à l'aide du lemme suivant : *une courbe est une hélice si, à des accroissements égaux de l'abscisse curviligne, correspondent des accroissements égaux de l'ordonnée.*

de division de cette droite, une longueur constante, égale au côté BA de l'équerre, et joindre ensuite les points a_1, b_1, c_1..., r_1 ainsi obtenus, avec les points α', β', γ'..., α'.

189. La trace horizontale de l'héliçoïde est la courbe *abc...r*, lieu des traces horizontales des génératrices. Il est facile de voir que cette courbe est une *spirale d'Archimède*. En effet, les différents *rayons vecteurs oa*, *ob*, *oc*... sont, évidemment, proportionnels aux distances verticales $o'a_1$, $o'b_1$, $o'c_1$... Or, celles-ci forment une progression par différence; donc il en est de même des rayons. Et comme les angles *aob*, *boc*... sont égaux, il s'ensuit que la courbe *abc...r* est telle, qu'à des accroissements égaux de l'amplitude correspondent des accroissements égaux du rayon vecteur. C'est ce qu'il fallait démontrer.

190. *Construction du plan tangent*. Pour plus de simplicité, proposons-nous de mener le plan tangent en un point ($\varkappa$, $\varkappa'$) pris sur l'hélice directrice. Ce plan doit contenir la génératrice (ok, k_1k'), et la tangente à l'hélice au point ($\varkappa$, $\varkappa'$). Pour déterminer cette dernière droite, rappelons-nous que la sous-tangente $\varkappa t$ est égale à l'abscisse curviligne $\alpha\beta...\varkappa$. La trace horizontale t étant ainsi construite, le plan tangent $tksv$ sera connu, puisque sa trace horizontale est tk, et qu'il passe par le point (o, k_1).

191. Si le point de contact, au lieu d'être situé sur l'hélice directrice, était quelconque, on remplacerait cette dernière courbe par l'hélice passant au point donné.

192. *Section de la surface par son plan tangent*. On obtiendra les deux projections de cette courbe d'intersection, en construisant les points où les génératrices ($b\beta$, $b'\beta'$), ($c\gamma$, $c'\gamma'$)... percent le plan vst. Cette recherche ne présentant aucune difficulté, nous ne l'avons pas effectuée sur

[illegible] roposer cet [illegible] *rbe* dont il [illegible] *énérale des* [illegible] x′) (*).

[illegible], il faudrait, [illegible] *de raccorde-* [illegible] orie que nous [illegible] r la *Géométrie*

CHAPITRE VIII.

Sections planes des surfaces de révolution.

193. Dans ce chapitre, nous choisirons, comme exemples de surfaces coupées par un plan, l'hyperboloïde de révolution, et le *tore*, c'est-à-dire *la surface engendrée par une circonférence tournant autour d'un axe situé dans le plan de cette ligne.*

PROBLÈME XVI.

Construire la section faite, par un plan, dans un hyperboloïde de révolution, à une nappe.

194. Au lieu de nous donner la section méridienne de l'hyperboloïde, nous pourrons, pour plus de simplicité,
Fig. 55. déterminer cette surface par son axe (o, oz'), et par une position particulière de sa génératrice rectiligne : nous pourrons même choisir cette droite (ab, $a'o'$), parallèle au plan vertical de projection. En outre, nous supposerons que ce plan a été pris perpendiculairement au plan sécant $\alpha\beta\gamma$. De cette manière, la projection verticale de la courbe d'intersection sera confondue avec la trace verticale $\beta\gamma$; et il nous suffira de chercher la projection horizontale $unkmv$.

195. L'axe de l'hyperboloïde étant vertical, et la génératrice (ab, $a'o'$) étant parallèle au plan vertical, la plus courte distance de ces deux droites sera, évidemment, perpendiculaire au plan vertical. Elle aura donc, pour projection verticale, le point o' où se coupent oz' et $a'o'$, et pour projection horizontale, le prolongement ob de oo'. Par suite,

teur, sur le
et il aura,
a ligne de
ntité *bc* qui
génératrice
complète-

d'un point
nt M, passe
rticale *m'p'*
e en (p', p)
du point *o*
ssant en *p*,
ondant à *m'*.
ain nombre
ec l'approxi-
mv de l'in-

coupe l'hy-
eux courbes
ment, pour
perboloïde,
dans le cône
rice $(ab, a'o')$
o (o, o'), sa
sa projec-
orizontale du
comme dia-
es projections
incipales. A
l'inspection

des données, prévoir quel sera le genre de la section (116). Dans notre épure, le plan $\alpha\beta\gamma$ coupe une seule nappe du cône : la section de l'hyperboloïde est donc une ellipse.

198. *Détermination du centre et des sommets.* Le centre de la section faite dans le cône serait le milieu (i, i') du segment $g'h'$ déterminé sur la trace verticale $\beta\gamma$, par les génératrices extrêmes. Donc, d'après le théorème rappelé tout à l'heure, ce point (i, i') sera aussi le centre de la section faite dans l'hyperboloïde. Et comme le plan vertical de projection partage la figure en deux parties symétriques, l'un des axes principaux de la courbe sera $\beta\gamma$, et l'autre sera la perpendiculaire au plan vertical, projetée en i' (*).

199. Si cette dernière droite est un *axe réel*, c'est-à-dire si la section a deux *sommets* projetés en i', on obtiendra leurs projections horizontales par la construction générale indiquée ci-dessus. Dans notre épure, l'une de ces projections est le point k.

La recherche des sommets situés sur la trace verticale du plan sécant est un peu plus longue : elle repose sur les considérations suivantes.

200. Supposons, pour un instant, que ces sommets aient été déterminés, et soit (u, u') l'un d'eux. Ce point appartient à l'hyperboloïde; donc il est situé sur l'une des positions que prendra la génératrice principale (ab, $a'o'$) quand elle tournera autour de l'axe (o, $o'z'$). Appelons A cette position inconnue. Si le système des deux droites A et $\beta\gamma$ tourne autour de l'axe, jusqu'à ce que A vienne reprendre

(*) Nous supposons ici que la courbe d'intersection est une ellipse ou une hyperbole. Si elle dégénérait en parabole, le second axe disparaîtrait.

endrera un
nce $\beta\delta\varepsilon$,
ice mobile,
, nous ob-
déterminer
$n'o'$) perce
termination

e, menons
e dernière
sant par le
an coupe le
zontales se-
Soit r l'une
ection hori-
plan $l'q'a$.
le la droite
u').
même ma-
égale à $i'u'$.
enir la tan-
ommençons
l'hyperbo-
ratrices rec-
pour projec-
a projection
horizontales
l'hyperbo-
horizontale
izontale Tm

202. *Remarque.* La droite $\theta\theta_1$ est, évidemment, perpendiculaire à la trace horizontale du méridien passant en M. La construction du plan tangent, employée tout à l'heure, ne diffère donc pas de celle qui a été donnée au n° 68.

203. *Cas où la section est une hyperbole.* Il n'offre rien de particulier, si ce n'est la détermination des asymptotes. On pourrait effectuer directement cette recherche; mais on la simplifiera beaucoup, en observant que les sections faites, par le plan donné, dans l'hyperboloïde et dans le cône asymptotique, ont les mêmes asymptotes; en effet, ces courbes sont semblables, semblablement placées, et concentriques (167). On a vu d'ailleurs, précédemment, à quoi se réduit la détermination des asymptotes de la section plane d'un cône de révolution (118). Il sera donc facile de construire les asymptotes de la section faite dans l'hyperboloïde.

PROBLÈME XVII.

Construire la courbe d'intersection d'un plan et d'un tore.

204. Comme d'habitude, faisons passer le plan vertical
Fig. 56. de projection par l'axe oz' de la surface de révolution, perpendiculairement au plan sécant. En outre, supposons le tore posé sur le plan horizontal : sa section méridienne se composera du système de deux cercles $i'l'$, $i'_1l'_1$, égaux entre eux, symétriquement placés par rapport à l'axe (*), et tangents à la ligne de terre. Le contour apparent relatif au plan vertical aura pour projection, outre les deux circonférences méridiennes, les tangentes communes ii_1, $l'l'_1$. En

(*) En architecture, cette section méridienne serait appelée *coupe du tore.*

effet, le plan tangent en un point quelconque de la section méridienne principale est perpendiculaire à cette section, c'est-à-dire perpendiculaire au plan vertical; et, d'un autre côté, le plan tangent en un point quelconque du *parallèle moyen* ($iefi_1$, $l'l'_1$) est horizontal, etc. Enfin, le contour apparent, relatif au plan horizontal, est formé par les parallèles extrêmes (bhb_1, $b'b'_1$) et (aga_1, $a'a'_1$) (63).

205. Suivant la position attribuée au plan sécant, on obtient des courbes de formes très-variées, dont la discussion nous entraînerait au delà des limites que nous nous sommes prescrites. Afin d'obtenir un résultat intéressant, nous prendrons, pour trace verticale du plan, la *tangente commune* $d'c'$ aux deux cercles $i'l'$, $i'_1l'_1$. De cette manière, le plan sécant $\alpha\beta\gamma$ passe par le centre de la surface, et il touche celle-ci aux points c', d'.

206. En opérant comme dans le Problème précédent, c'est-à-dire en construisant les points où le plan donné rencontre un certain nombre de parallèles du tore, on obtient, sans aucune difficulté, la projection horizontale de l'intersection cherchée. Cette projection, dont l'épure ne présente que *la moitié*, se compose de deux arcs *cehfd*, *cgd*, et de deux autres arcs, symétriques de ceux-ci, par rapport à la ligne de terre. L'arc *cehfd* se *raccorde* avec le symétrique de *cgd*, et ce dernier arc *cgd* se raccorde avec le symétrique de *cehfd;* en sorte que la projection horizontale complète paraît composée de deux ellipses égales, qui se couperaient aux points *c*, *d*, projections des points où le plan donné touche le tore.

207. *Rabattement de la section.* Pour ne pas jeter de confusion dans l'épure, faisons tourner le plan sécant autour de la perpendiculaire au plan vertical de projection,

passant par le centre (o, o') de la surface; puis, quand le plan mobile sera devenu horizontal, transportons la ligne de terre, parallèlement à elle-même, jusqu'en XY. La construction employée dans le Problème X (78) donnera, pour le rabattement cherché, le système de deux courbes CEHFDGC, $CG_2DF_1E_1$, placées symétriquement par rapport à XY, et qui se coupent sur cette droite.

208. M. Yvon Villarceau a démontré que *ces deux courbes sont deux circonférences égales à celle qui est décrite par le centre* (i, i') *du cercle générateur, et dont les centres sont distants de l'axe d'une quantité égale au rayon de ce cercle* (*).

209. *Remarque.* Il résulte, de ce Théorème, que *le tore admet trois séries de sections planes, doublement circulaires.*

(*) Pour *vérifier* l'élégant Théorème de M. Villarceau, faisons $o'i'=a$, $i'a'=R$, $ip=\delta$; abaissons M_1U perpendiculaire à OH, et menons O_1M_1.

Nous aurons d'abord : $OH=o'b'=a+R$, $OG_2=o'a'=a-R$; d'où, en prenant le milieu O_1 de G_2H : $O_1H=a$, $OO_1=R$.

Le point (m_1, m'), qui a M_1 pour rabattement, est situé sur le parallèle projeté en $q'q'_1$; donc $\overline{OU}^2=\overline{o'_1q'}^2-\overline{o'_1m'}^2$.

Le premier terme du second membre est égal à $(a+\delta)^2$. D'un autre côté, les triangles $o'o'_1m'$, $i'c'o'$ donnent $\frac{o'_1m'}{o'c'}=\frac{o'_1o'}{i'c'}=\frac{o'm'}{o'i'}$, ou

$$\frac{\overline{o'_1m'}^2}{a^2-R^2}=\frac{R^2-\delta^2}{R^2}=\frac{\overline{o'm'}^2}{a^2}.$$

L'équation précédente devient donc

$$\overline{OU}^2=(a+\delta)^2-\frac{(a-R)^2(R^2-\delta^2)}{R^2}.$$

De cette valeur, résulte $O_1U=\frac{a\delta}{R}$. Et comme $M_1U=o'm'=\frac{a}{R}\sqrt{R^2-\delta^2}$, le triangle rectangle O_1UM_1 donne $\overline{O_1M_1}^2=\frac{a^2\delta^2}{R^2}+\frac{a^2}{R^2}(R^2-\delta^2)=a^2$.

La distance O_1M_1 est donc constante, etc.

En effet, *tout plan passant par l'axe*, ou *tout plan perpendiculaire à l'axe*, ou enfin *tout plan tangent passant par le centre, coupe le tore suivant deux circonférences.*

210. *Seconde remarque.* On peut ajouter que *le tore admet trois séries de sections sphériques, doublement circulaires.*

En effet : 1° si l'on coupe la section méridienne du tore par une circonférence ayant son centre sur l'axe, les points communs aux deux courbes décriront, lors de la rotation, deux parallèles communes au tore et à la sphère engendrée par cette circonférence.

2° Par le cercle générateur du tore on peut faire passer une infinité de sphères. Par le centre de l'une d'elles, menons un plan méridien : il partagera le système des deux corps en deux parties symétriques. Donc la sphère coupera le tore, de nouveau, suivant un cercle égal au premier.

3° De même, par le cercle EF, situé sur le tore, on peut faire passer une infinité de sphères. Par le centre de l'une d'elles, menons encore un plan méridien. Il partagera le système des deux corps en deux parties symétriques. Donc, etc.

CHAPITRE IX.

Intersection de deux surfaces courbes.

211. Dans les chapitres V, VII et VIII de cet ouvrage, nous avons indiqué les méthodes que l'on doit employer quand on veut construire la section plane d'une surface réglée ou d'une surface de révolution. Si le lecteur a saisi l'esprit de ces méthodes, il a dû reconnaître que, dans chaque cas, on coupe la surface et le plan donnés, par une série de plans auxiliaires, tellement choisis, que chacun d'eux détermine sur la surface une ligne facile à construire : par exemple, une droite ou une circonférence. La rencontre de cette ligne avec l'intersection du plan donné et du plan auxiliaire appartient à la courbe cherchée, dont on obtient ainsi un certain nombre de points. En unissant par un ou *plusieurs* traits continus les points déterminés par tous les plans auxiliaires, on a enfin cette courbe, avec une approximation plus ou moins grande (*).

212. En résumant ce procédé, on voit qu'il consiste véritablement à remplacer le problème proposé par une série de problèmes du même genre, mais plus simples. Par exemple, pour obtenir l'intersection d'un hyperboloïde de révolution et d'un plan, on construit les sections de cette surface par des plans parallèles à son axe, et l'on combine ces lignes avec les droites suivant lesquelles le plan donné coupe le plan auxiliaire.

(*) Dans ce paragraphe et dans ceux qui suivent, le mot *projection* est sous-entendu.

213. Quand on veut construire l'intersection L de deux surfaces courbes quelconques S et S′, on ne fait que généraliser la méthode dont nous venons d'indiquer la partie essentielle. Ainsi, après avoir examiné s'il existe une série de surfaces Σ, Σ_1, Σ_2..., qui coupent S et S′ suivant des lignes faciles à déterminer, on construit les intersections l, l' de la surface auxiliaire Σ avec les surfaces données; puis les intersections l_1, l'_1 de Σ_1 avec ces mêmes surfaces, etc. Ces deux séries de lignes étant obtenues, on cherche le point de rencontre m de l et de l' (*); puis le point de rencontre m_1 de l_1 et de l'_1; et ainsi de suite. Enfin, on construit le lieu des points m, m_1, m_2... : ce lieu est la courbe cherchée L.

214. Les surfaces auxiliaires Σ, Σ_1, Σ_2..., seront, presque toujours, des plans, sans quoi, la recherche des courbes l, l', l_1, l'_1..., pourrait être aussi difficile que celle de la courbe L; et l'emploi de ces surfaces n'aurait pas simplifié le problème (**). En outre, sauf les cas, très-peu nombreux, dans lesquels les surfaces proposées admettront des sections rectilignes ou circulaires, cette détermination des courbes l, l', l_1, l'_1..., nécessitera encore tant d'opérations graphiques, que l'on est en droit de regarder la solution générale du problème dont nous nous occupons, sinon comme illusoire, du moins comme fort peu satisfaisante (***).

(*) Les courbes l, l' se couperont si la surface auxiliaire Σ, à laquelle elles appartiennent, tombe entre certaines limites. — Voyez, pour les surfaces-limites, les Problèmes XVIII et suivants.

(**) Cependant, lorsque les surfaces S, S′ sont de révolution, et que leurs axes se coupent, on adopte des sphères pour surfaces auxiliaires. Voyez le Problème XX.

(***) Si l'on savait toujours éliminer une inconnue entre deux équations, la solution algébrique du problème l'emporterait, de beaucoup,

215. Avant d'appliquer ces considérations à quelques exemples très-simples, nous ferons observer que *la tangente* T *en un point quelconque* M *de la courbe* L *d'intersection de deux surfaces* S, S′, *est, en général, l'intersection des plans* P, P′, *respectivement tangents aux deux surfaces, en ce point* M.

En effet, d'après la propriété caractéristique du plan tangent (27), la droite T, tangente en M à la courbe L tracée sur la surface S, est située dans le plan P. De même, elle est dans le plan P′; donc, etc.

216. Quelquefois, la construction de la tangente peut être simplifiée au moyen de la proposition suivante :

La tangente T, *en un point quelconque* M *de la courbe* L *d'intersection de deux surfaces* S, S′, *est perpendiculaire au plan des normales* N, N′ *menées, par ce point, à ces surfaces.*

Pour démontrer cette proposition, il suffit d'observer que la normale N étant, par définition, perpendiculaire au plan tangent P, elle sera perpendiculaire à la tangente T. De même pour la normale N′. Or, une droite est dite perpendiculaire à un plan, lorsqu'elle est perpendiculaire à deux droites menées, par son pied, dans ce plan; etc.

217. *Remarque.* Le plan des deux normales N, N′ est dit *normal* à la courbe L.

---

sur la solution géométrique. En effet, les projections de la courbe cherchée seraient représentées par les équations obtenues en éliminant z, puis x, entre les équations des deux surfaces données.

PROBLÈME XVIII.

Intersection de deux cylindres.

218. *Recherche d'un point quelconque.* Après avoir construit les contours apparents des deux cylindres, que nous supposons, pour plus de régularité dans l'épure, limités à deux plans horizontaux xy, $x'y'$, déterminons les surfaces auxiliaires qui donneront lieu aux intersections les plus simples. Ces surfaces seront des plans parallèles, à la fois, aux génératrices des deux cylindres. Il est clair, en outre, que ces plans seront parallèles entre eux. FIG. 57.

Pour déterminer leur direction commune, menons, par un point arbitraire (i, i'), une parallèle $(ik, i'k')$ aux génératrices du cylindre C, et une parallèle $(il, i'l')$ aux génératrices du cylindre C'. La trace horizontale du plan de ces deux lignes sera la droite lk, à laquelle les traces horizontales de tous les plans auxiliaires devront être parallèles. Si donc nous menons une sécante pq, parallèle à lk, cette droite pq sera la trace horizontale d'un plan qui coupera les deux cylindres suivant des génératrices $(pm, p'm')$, $(qm, q'm')$ ayant les points p, q pour traces horizontales; et le point (m, m'), où ces lignes se rencontrent, appartiendra à la courbe cherchée. En répétant la même construction, on obtiendrait de nouveaux points, aussi nombreux que l'on voudrait; mais, pour avoir une idée nette de la nature de l'intersection, il vaut mieux construire d'abord les points situés sur les plans-limites, et ensuite les points appartenant aux contours apparents.

219. *Points situés sur les plans-limites.* Menons, parallèlement à kl, une droite $\alpha\beta\gamma$ qui, tangente à l'une des bases données, soit sécante à l'autre : cette droite sera la trace

horizontale d'un plan-limite, c'est-à-dire d'un plan au delà duquel il n'y aura aucun point appartenant à l'intersection des deux cylindres. De même, $\delta\varepsilon\eta$ est la trace d'un autre plan-limite (*). Chacun de ces plans est tangent à l'un des cylindres et sécant à l'autre. De plus, tandis qu'un plan auxiliaire quelconque, le plan pq, par exemple, fournit quatre points de l'intersection, chacun des plans-limites en donne seulement deux. C'est ce que l'on reconnaît à l'inspection de l'épure.

220. On peut ajouter que, *en chacun des points situés sur un plan-limite, la tangente à l'intersection est la génératrice commune à ce plan et au cylindre qu'il coupe.*

En effet, la tangente au point (k, k') est l'intersection du plan $\alpha\beta\gamma$, avec le plan tangent au cylindre C, suivant la génératrice $(\gamma k, \gamma' k')$, laquelle est située dans le premier plan; donc la tangente ne diffère pas de cette génératrice.

221. *Remarque.* S'il arrivait que le plan-limite fût tangent aux deux cylindres, la méthode générale serait en défaut, et, pour déterminer la tangente au point (k, k'), il faudrait recourir à d'autres théories, que nous ne pouvons indiquer ici.

222. *Distinction entre l'arrachement et la pénétration.* Dans notre épure, le plan $\alpha\beta\gamma$ est tangent au cylindre C′, et le plan $\delta\varepsilon\eta$ est tangent au cylindre C. Il résulte, de cette disposition, que chacune des deux surfaces est rencontrée par une partie seulement des génératrices appartenant à

(*) Si les bases des cylindres étaient des courbes non convexes, on pourrait trouver plusieurs plans-limites P, P′, P″, P‴..., partageant l'espace en régions telles que, de deux régions consécutives, l'une contiendrait des points communs aux deux cylindres, et l'autre n'en renfermerait pas. Au reste, les *plans-limites* sont des cas particuliers des *surfaces-limites* dont il a été question ci-dessus.

l'autre, *et vice versâ.* Dans ce cas, *l'intersection est composée d'une seule branche,* et l'on dit qu'il y a *arrachement* des deux cylindres.

Si les plans-limites sont tangents à un même cylindre, comme l'indique la figure 58, il y a *pénétration* : le cylindre C′ traverse le cylindre C, de part en part; et, par conséquent, *l'intersection se compose de deux branches séparées*, dont l'une est la *courbe d'entrée*, et l'autre la *courbe de sortie.*

223. *Points situés sur les contours apparents.* Il est avantageux de faire passer des plans auxiliaires, par les génératrices qui déterminent les contours apparents; parce que ces plans donnent des points pour lesquels les tangentes sont immédiatement connues. Considérons, par exemple, le plan $f\pi$, mené par la génératrice-limite (ff_1, $f'f'_1$), et soient (r, r'), (s, s') les deux points où cette génératrice perce le cylindre C′. Le plan tangent en (r, r'), au cylindre C, est vertical; donc la tangente à l'intersection, en ce point (r, r'), est projetée suivant ff_1. Fig. 57.

Semblablement, les tangentes aux points situés sur les génératrices qui ont b, d pour traces, sont projetées horizontalement suivant bb_1, dd_1.

La même démonstration s'applique aux points situés sur les génératrices dont les traces sont a, c, e, g : les projections verticales des tangentes en ces points sont confondues avec les projections des génératrices.

En général, *la tangente à l'intersection de deux surfaces, en un point situé sur le contour apparent de l'une d'elles, se projette, sur le plan auquel ce contour apparent est relatif, suivant la tangente à la projection de ce même contour.*

224. *Construction de la tangente.* La construction de la tangente (mt, $m't'$) en un point quelconque (m, m') de l'intersection des deux cylindres, n'offre aucune difficulté, puisque cette droite est l'intersection des plans dont les traces horizontales sont les tangentes tp, tq aux bases des deux cylindres.

225. Si l'on voulait déterminer les points pour lesquels la tangente est horizontale, c'est-à-dire *le point le plus haut* et *le point le plus bas* (*) de la courbe d'intersection, on remarquerait que, pour chacun d'eux, les plans tangents aux deux cylindres ont leurs traces horizontales parallèles à la tangente, et, par conséquent, parallèles entre elles. On devra donc, *par tâtonnement*, construire un plan auxiliaire tel, que les tangentes aux extrémités λ, ν de sa trace horizontale, soient parallèles entre elles.

226. Nous n'avons pas encore indiqué comment on doit s'y prendre pour réunir, par un trait continu, les points obtenus *isolément*, et qui appartiennent, par exemple, à la projection horizontale de l'intersection. La considération suivante fournit un procédé assez commode.

FIG. 59. Soient ABCD... la courbe d'intersection de deux cylindres dont les bases sont $abcdef$ et $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$. Soient $a\alpha$, $\beta\varepsilon$, $c\delta$ les traces horizontales des plans auxiliaires, et Aa, Aα, Bb, Bβ..., les génératrices qu'elles déterminent.

Nous pouvons regarder l'arc $abcde$ comme une *projec-*

(*) En général, *si la tangente en un point* M *d'une courbe* C *est parallèle à un plan* P, *la distance du point* M *à ce plan est un maximum ou un minimum.* On peut démontrer cette proposition par le moyen employé dans le n° 45. Cependant, si le point M est un *point singulier*, la propriété peut ne plus subsister.

tion de ABC..., faite parallèlement à A*a*. De même, l'arc $\gamma\beta\alpha\equiv\delta$ sera une seconde projection de cette ligne.

Cela posé, admettons qu'un mobile M décrive la courbe ABC..., tandis que ses projections *m*, μ se meuvent sur les bases des deux cylindres. Si, pour fixer les idées, on suppose que M, parti du point A, marche dans le sens indiqué par les flèches F, il est clair que la projection *m* décrira d'abord l'arc *abc*, et que la projection μ décrira l'arc $\alpha\beta\gamma$. Quand le mobile M sera arrivé en C, le mobile *m* continuera à se mouvoir dans le même sens que précédemment, et il décrira l'arc *cde ;* mais le mobile μ *rebroussera chemin*, et il parcourra l'arc $\gamma\beta\alpha$, dans un sens contraire au sens primitif. La même discussion pourrait être continuée : elle est suffisamment indiquée par les flèches *f*, *f'*, φ et φ'.

Supposons à présent que ABCD..., au lieu d'être l'intersection des deux cylindres, soit seulement la projection horizontale de cette ligne, projection dont on a obtenu des points, en combinant les projections horizontales *a*A, *b*B... des génératrices du premier cylindre, avec les projections αA, βB... des génératrices du second. Quand les mobiles *m*, μ décrivent les arcs *ab*, $\alpha\beta$, le mobile M doit se transporter de A en B; donc ces deux points doivent être réunis par un arc continu; etc.

227. D'après les conventions adoptées, nous avons, dans notre épure, tracé en *plein* les projections des parties visibles, et en *points ronds* les projections des parties invisibles. Relativement à la courbe d'intersection, il importe d'observer qu'un point quelconque de cette ligne étant toujours l'intersection de deux génératrices, il ne sera visible que s'il est situé sur deux génératrices visibles.

PROBLÈME XIX.

Intersection de deux cônes.

228. Les *surfaces auxiliaires* qui détermineront, de la manière la plus simple, l'intersection NDMCP de deux
Fig. 60. cônes C, C′ donnés, sont, évidemment, des plans passant par les sommets S, T. Leurs traces horizontales convergent toutes par la trace horizontale R de cette droite. Sauf cette légère modification, la construction de l'épure est identique à celle de l'épure précédente. Nous ne devrions donc entrer dans aucune explication sur le problème actuel, s'il ne donnait lieu à une recherche intéressante, celle des *branches infinies*.

229. Le raisonnement dont nous avons fait usage à propos de la section hyperbolique du cône, démontre que *l'intersection de deux surfaces coniques* C, C′ *a des branches infinies, s'il existe, sur ces surfaces, deux génératrices* (*sa*, *s′a′*), (*tα*, *t′α′*) *parallèles entre elles.*

En effet, remplaçons le plan P de ces génératrices parallèles, par un autre plan auxiliaire P′ faisant un très-petit angle avec le premier : il déterminera, dans les deux cônes, deux droites dont l'inclinaison mutuelle pourra être rendue aussi petite que nous voudrons. Leur point de rencontre pourra donc s'éloigner des sommets S, T, au delà de toute limite. C'est ce qu'il fallait démontrer (*).

(*) Si l'on appliquait ce mode de démonstration au cas de deux cônes ou de deux cylindres dont les bases seraient indéfinies, il pourrait conduire à des conclusions fausses. Ainsi, avec une même directrice parabolique, on peut construire deux cylindres : leur intersection sera indéfinie; et cependant les génératrices de l'un ne seront pas parallèles aux génératrices de l'autre; etc.

230. Afin de reconnaître si les deux cônes C, C′ admettent des génératrices parallèles, transportons l'un d'eux, *parallèlement à lui-même*, jusqu'à ce que son sommet S vienne coïncider avec l'autre sommet T; c'est-à-dire, prenons ce dernier point pour sommet d'un cône c dont les génératrices soient parallèles à celles du cône C. Si les cônes donnés admettent deux génératrices parallèles $(sa, s'a')$, $(t\alpha, t'\alpha')$, cette dernière droite sera commune au *cône fixe* C′ et au cône *auxiliaire* c; en sorte que les traces de ces dernières surfaces se couperont en un point α. Toute la question se réduit donc à la construction de la courbe $\alpha\varepsilon\lambda$, trace horizontale du cône c.

231. Il est très-facile de reconnaître que cette courbe est semblable à la trace du cône C, et que *le centre de similitude* des deux lignes est le point r, trace horizontale de la droite menée par les sommets S, T. En effet, soient sf, $t\varphi$ les projections horizontales de deux génératrices parallèles, respectivement situées sur les cônes C, c. Le plan de ces deux génératrices passe en (r, r'); donc les deux traces horizontales f, φ, et le point r, sont sur une même droite; etc.

La trace $\alpha\varepsilon\lambda$ du cône auxiliaire étant semblable à celle du cône C, on pourra, à l'aide du centre de similitude r, et sans employer les projections verticales, construire par points cette courbe $\alpha\varepsilon\lambda$, et déterminer ses intersections α, λ avec la trace du cône C′. On obtient ainsi, dans l'exemple proposé, deux couples de génératrices parallèles; savoir, $(sa, s'a')$ et $(t\alpha, t'\alpha')$; puis $(ls, l's')$ et $(t\lambda, t'\lambda')$. L'intersection des nappes inférieures des deux cônes est donc une courbe projetée horizontalement suivant $pcmdn$, et

qui s'étend indéfiniment dans deux sens, de c vers p, et de d vers n (*).

232. *Construction des asymptotes.* En remontant à la définition de ces droites (118), et à la construction générale de la tangente en un point de l'intersection de deux surfaces, on conclut immédiatement que l'asymptote de l'arc indéfini mcp... sera l'intersection du plan tangent au cône C, suivant la génératrice (ls, $l's'$), avec le plan tangent au cône C', le long de la génératrice ($t\lambda$, $t'\lambda'$).

Ces deux plans tangents ont pour traces horizontales les tangentes lu, λu aux bases des deux cônes; d'ailleurs, les génératrices de contact sont parallèles entre elles : la projection horizontale de l'asymptote, ou *l'asymptote à la projection horizontale de l'intersection*, sera donc la droite uv, parallèle à ls et $t\lambda$.

On construirait, de la même manière, l'asymptote à l'arc indéfini mdn.

233. *Remarque.* Si les tangentes lu, λu étaient parallèles, l'asymptote uv serait *transportée à l'infini;* c'est-à-dire qu'elle n'existerait plus.

PROBLÈME XX.

Intersection de deux surfaces de révolution, dont les axes se rencontrent.

234. Prenons le plan horizontal de projection, perpendiculaire à l'un des axes, et le plan vertical, passant par

(*) Si les deux cônes étaient prolongés au delà de leurs sommets, ils se couperaient suivant une nouvelle branche infinie. Pour ne pas compliquer inutilement l'épure, nous avons supprimé cette seconde partie de l'intersection. Nous avons eu même temps essayé de représenter, en projection verticale, les deux nappes inférieures, en les supposant interrompues à partir de leur intersection.

ces deux droites. Les surfaces de révolution seront déterminées, si l'on donne leurs axes $(o, o'z')$, $(xy, e'g')$ et leurs sections méridiennes $a'b'c'd'$, $e'f'g'h'$. Nous pourrons construire, comme d'habitude, le cercle dnb, projection du contour apparent de la surface dont l'axe est vertical. Quant à la seconde surface, la détermination de son contour apparent, relatif au plan horizontal, exigerait l'emploi de méthodes que nous ne pouvons indiquer ici (*); nous la regarderons donc comme suffisamment connue par sa section méridienne et son axe. D'ailleurs, ces deux éléments sont les seuls dont nous aurons besoin. Fig. 61.

235. Les *surfaces auxiliaires* (214) par lesquelles il convient de couper les surfaces données, sont des sphères ayant pour centre commun le point (o, o') où se coupent les deux axes (**). L'emploi de ces sphères est justifié par les deux propriétés suivantes, qu'il suffit d'énoncer : 1° *quand deux surfaces de révolution ont même axe, elles se coupent suivant un parallèle commun;* 2° *la sphère est une surface de révolution qui a pour axe toute droite passant par son centre.*

236. Soit donc $k'p'l'q'$ la section méridienne d'une sphère quelconque, ayant pour centre le point (o, o'). Le parallèle commun à cette surface auxiliaire et à la première des surfaces données est engendré par le point (k, k'), où

(*) Si la section méridienne $e'f'g'h'$ est, comme dans notre épure, une ligne du second degré, la projection du contour apparent est une ligne du second degré, parce que *la courbe de contact d'un cylindre et d'une surface de second ordre est plane.*

(**) Dans le cas très-particulier où les deux axes seraient parallèles, on couperait les deux surfaces par des plans horizontaux, c'est-à-dire perpendiculaires à ces axes.

se coupent les sections méridiennes; de plus, il est situé dans un plan perpendiculaire à l'axe commun $(o, o'z')$; donc ce parallèle est projeté *tout entier* suivant la corde commune $k'l'$. De même, le parallèle commun à la sphère auxiliaire et à la seconde surface de révolution, est projeté verticalement suivant la corde $p'q'$, commune aux deux sections méridiennes. Si donc les deux cordes $k'l'$, $p'q'$ se coupent en un point m', les deux circonférences dont ces cordes sont les diamètres se rencontrent, dans l'espace, *en deux points* symétriquement placés à l'égard du plan vertical, et qui auront m' pour projection verticale commune. Ces deux points appartiendront à l'intersection cherchée.

En répétant la construction, on obtient, pour projection verticale de cette intersection, la courbe $i'm'n'h'$, laquelle, évidemment, doit passer par les points i', h' communs aux sections méridiennes données.

237. La projection horizontale $imnh$ se construit sans difficulté. En effet, le point (m, m'), par exemple, appartient au parallèle projeté verticalement suivant $k'l'$. Ce parallèle, étant horizontal, se projette en vraie grandeur suivant la circonférence kml; etc.

238. *Remarque. Si les surfaces données sont du second ordre, la projection verticale de leur intersection appartient à une ligne du second degré* (*).

(*) En effet, le plan vertical de projection est un plan *principal* par rapport à chacune des deux surfaces. Or, *l'intersection de deux surfaces du second ordre qui ont un plan principal commun, se projette, sur ce plan, suivant une ligne du second ordre;* donc, etc.

Le cas où les deux sections méridiennes du second degré auraient *un foyer commun*, mérite d'être remarqué : *la projection verticale de*

239. D'après ce qui précède, si deux cordes, déterminées par une circonférence auxiliaire, concourent en un point *extérieur* à la circonférence, ce point n'appartiendra pas à la projection verticale de l'intersection des deux surfaces. Néanmoins, *il sera situé sur la ligne dont cette projection est un arc* (*).

---

l'intersection se réduit alors *à une ligne droite, ou au système de deux droites.*

Pour démontrer cette propriété, rapportons les méridiennes à des axes rectangulaires passant par le foyer commun; nous pourrons représenter ces deux courbes par

$$x^2+y^2=(my+nx+p)^2, \qquad (1)$$
$$x^2+y^2=(m'y+n'x+p')^2. \qquad (2)$$

L'équation de la circonférence variable sera

$$x^2+y^2=\rho^2. \qquad (3)$$

Retranchons membre à membre les équations (1) et (3) : la formule

$$(my+nx+p)^2=\rho^2 \qquad (4)$$

représentera deux cordes telles que $k'l'$, communes à la courbe (1) et à la circonférence. De même, la corde $p'q'$ est donnée par l'équation

$$(m'y+n'x+p')^2=\rho^2. \qquad (5)$$

Actuellement, éliminons ρ entre les relations (4) et (5), afin d'obtenir l'équation du lieu des points m'; nous trouverons

$$(my+nx+p)^2=(m'y+n'x+p')^2, \qquad (6)$$

équation qui représente deux droites.

(*) Si l'on cherchait l'équation du lieu des points dont il s'agit, on trouverait qu'elle ne diffère pas de celle qui représente la projection verticale de l'intersection. Cette projection fait donc partie du premier lieu.

Il y a plus : ce même lieu peut se terminer brusquement, parce que les circonférences auxiliaires deviennent trop petites ou trop grandes. Dans ce cas, la courbe obtenue en construisant les points déterminés par les circonférences, courbe dont une partie constitue la projection verticale $f'n'h'$, n'est elle-même qu'une partie du lieu représenté par l'équation. C'est là un des nombreux exemples dans lesquels l'emploi de l'Algèbre conduit à un résultat plus général que ne paraissaient le comporter les données du problème.

240. *Construction de la tangente.* On pourrait, pour déterminer la tangente en un point quelconque (m, m') de la courbe d'intersection, construire les plans tangents, en ce point, aux deux surfaces. Mais il sera plus simple de recourir à la *méthode du plan normal* (216). En effet, la trace verticale de la normale en (m, m'), pour la première surface, est le point (o, r') (65). Semblablement, la normale à la seconde surface rencontre le plan vertical en un point projeté en s'. La trace verticale du plan des deux normales est donc $r's'$. Par suite, la droite $m't'$, menée perpendiculairement à cette trace, est la projection verticale de la tangente demandée.

On obtient sa projection horizontale en cherchant d'abord, à l'aide de la normale (mo, $m'r'$), la trace horizontale $\alpha\beta$ du plan normal, et en abaissant ensuite une perpendiculaire mt sur cette trace.

APPENDICE.

Sur les changements de plans de projection.

Si le lecteur a étudié avec attention les méthodes exposées dans cet ouvrage, il a dû reconnaître que, dans certains cas, les *procédés généraux* de la Géométrie descriptive devenant peu praticables, il devient avantageux de recourir à des *procédés particuliers*. Ainsi, les *projections définitives* d'une figure, qui nécessitent presque toujours la construction d'un grand nombre de lignes, s'obtiennent quelquefois très-rapidement à l'aide de *projections auxiliaires* résultant, soit de simples *rabattements*, soit de *rotations* effectuées autour d'axes convenablement choisis (*). Ainsi encore, la recherche des points où une surface est rencontrée par une droite peut être simplifiée, si l'on prend la droite pour génératrice d'une surface auxiliaire dont l'intersection, avec la surface donnée, renferme les points cherchés, etc.

Nous citerons, comme exemples de cette substitution de procédés particuliers aux méthodes fondamentales, le Problème LXVI de la Première Partie, l'épure de la *section droite d'un cylindre oblique*, la détermination des sommets de la *section plane d'un hyperboloïde* (200), et enfin tous les problèmes relatifs aux *surfaces de révolution*.

Dans ces dernières années, on a préconisé, outre mesure, l'emploi des projections auxiliaires. On a cru qu'il fallait,

(*) Remarquons, en passant, que les *rabattements* sont de véritables *rotations*.

à tout propos, et dans tous les problèmes de Géométrie descriptive, recourir à leur emploi. Il y a plus : oubliant que tous ceux qui ont écrit sur cette partie de la science ont indiqué les *petits procédés graphiques* dont nous parlons; oubliant que tous les Traités de Stéréotomie (*) en font mention, on s'est imaginé que l'ensemble de ces procédés constituait une véritable découverte. A une chose nouvelle il fallait un nom nouveau : on inventa celui de ***Méthode du changement des plans de projection!*** Les choses en sont venues à ce point que, dans le Programme pour l'admission à l'École Polytechnique, publié en 1850, on lisait, à propos des questions relatives à la ligne droite et au plan : *on fera usage, pour la résolution de ces problèmes, de la méthode du changement des plans de projection* (**). Depuis, la Commission chargée de la rédaction du programme, probablement effrayée par l'accusation de monopole lancée contre l'un de ses membres (***), est revenue sur sa première décision : aujourd'hui, elle se contente d'exiger l'explication de la méthode en question.

Comme nous voulons, avant tout, être utile aux jeunes

(*) L'ouvrage intitulé : *La théorie et la pratique de la Coupe des Pierres*, par Frézier (1769), contient une foule d'épures dans lesquelles l'auteur emploie des rabattements, des plans de profil, etc., c'est-à-dire de véritables changements de projection. Parmi les anciennes épures de l'École Polytechnique, il en est une, celle de la *descente biaise*, qui montre une heureuse application des *projections obliques*, faites sur un plan auxiliaire. Il serait facile de multiplier ces citations.

(**) Comment résoudrait-on, à l'aide de *la méthode*, le premier de ces problèmes : *Par un point donné dans l'espace, mener une droite parallèle à une droite donnée?* Quelle que soit la *nouvelle* solution, il est évident que la solution *vulgaire* doit être préférée.

(***) M. Th. Olivier, regardé comme l'auteur de *la Méthode*, faisait partie de la Commission.

gens qui se destinent à l'École Polytechnique, nous allons développer la solution du problème général que l'on peut se proposer sur le changement des plans de projection. Le lecteur pourra ensuite s'exercer sur les cas particuliers : ils comportent de nombreuses simplifications (*).

PROBLÈME.

Connaissant les projections d'un point, trouver ses projections sur un plan donné P et sur un plan P′, perpendiculaire à P, et dont l'intersection avec celui-ci est donnée.

Pour éviter des circonlocutions, nous dirons que les plans P et P′ sont, l'un, le *nouveau plan horizontal*, et l'autre, le *nouveau plan vertical* : dans la réalité, ces deux plans peuvent avoir, par rapport à l'horizontal, des inclinaisons quelconques. FIG. 62.

Cela posé, soient m, m' les projections du point donné, $\alpha\beta\gamma$ le plan P, ab la projection horizontale de la *nouvelle ligne de terre*. Si, du point (m, m'), nous abaissons une perpendiculaire sur le plan P, le pied de cette droite sera la nouvelle projection horizontale cherchée; et la longueur

(*) Quand une figure est rapportée à deux plans de projection, on doit, autant que possible, à l'aide des seules données de la question, résoudre le problème dont cette figure est l'objet. Ce serait presque toujours perdre inutilement le temps, que de vouloir la rapporter à de nouveaux plans, sur lesquels ses projections soient simples. Que dirait-on d'un élève qui, ayant à discuter une équation numérique du second degré, à trois variables, commencerait par chercher les plans principaux de la surface représentée par cette équation, et effectuerait ensuite la transformation de coordonnées? C'est pourtant à cela que revient la *méthode du changement des plans de projection!* Qu'on nous permette de le rappeler : en Mathématiques, comme en beaucoup d'autres choses,

de cette même droite sera égale à la hauteur de la nouvelle projection verticale, par rapport à la nouvelle ligne de terre.

Pour obtenir en même temps ces deux éléments, faisons passer, par le point (m, m'), un plan $\delta\varepsilon\zeta$, perpendiculaire à la trace $\alpha\beta$ du plan P, et rabattons-le sur le plan horizontal. Le rabattement du point donné sera l'extrémité m_1 de la droite mm_1 égale à em', et perpendiculaire à $\delta\varepsilon$: le rabattement de la perpendiculaire abaissée sur le plan P sera la droite m_1p_1, perpendiculaire elle-même à l'intersection $\delta\zeta_1$ du plan auxiliaire avec le plan P; etc. Si nous faisons à présent tourner le plan P autour de $\alpha\beta$, jusqu'à ce qu'il se rabatte sur le plan horizontal primitif; si nous construisons le rabattement aXY de la nouvelle ligne de terre, et celui P du point rabattu d'abord en p_1; enfin, si, après avoir abaissé Pp_2P′ perpendiculaire à XY, nous prenons p_2P′ égale à p_1m_1; nous pourrons regarder P comme la nouvelle projection horizontale du point (m, m'), et P′ comme sa nouvelle projection verticale.

[illegible] lution, tan-
[illegible] rayon de la
[illegible] cône donné,
[illegible] horizontal.
[illegible] l'une sphère
[illegible] vertical, est
[illegible] ur la surface
[illegible] ion verticale
[illegible] développe-
[illegible] intersection.
[illegible] par un plan.
[illegible] *oïdes hyper-*
[illegible] horizontale
[illegible] dont les axes
[illegible] révolution,
[illegible] volution dont
[illegible] rayon donné,
[illegible] oit, connais-
[illegible] rieure, et le

12. Intersection de trois cylindres de révolution, égaux entre eux, et dont les axes soient des droites données, se coupant en un même point.

13. Une sphère, de rayon donné, touche, en un point donné, un plan donné P. A cette sphère, on circonscrit un cône dont le sommet est donné, et qui est terminé au plan P. On demande de construire les projections de ce cône, les projections de sa base, et les projections du cercle suivant lequel il touche la sphère (*).

14. On donne une hélice, tracée sur un cylindre de révolution vertical, et l'on demande de construire les projections de cette courbe sur deux plans perpendiculaires entre eux, et perpendiculaires au plan vertical.

15. Construire la courbe d'intersection d'une sphère avec un cylindre ayant pour base le grand cercle horizontal de la sphère, et dont les génératrices sont parallèles à une droite donnée.

16. A une sphère donnée, circonscrire un cylindre dont les génératrices aient une direction donnée, et trouver l'intersection de ce cylindre avec un cône ou avec un cylindre donné.

17. Construire la courbe de contact d'un tore dont l'axe est vertical, avec un cylindre circonscrit à cette surface, et dont les génératrices sont parallèles à une droite donnée. On construira aussi la trace horizontale de ce cylindre.

18. On suppose que des anneaux, à section rectangulaire,

(*) Cette question et les six suivantes appartiennent à la *Théorie des ombres*.

et tous égaux entre eux, soient assemblés de manière à former une chaîne pesante, librement suspendue par une de ses extrémités. Dans cet état, deux anneaux consécutifs se rencontreront en *quatre* points appartenant à quatre arêtes intérieures. De plus, les axes de tous les anneaux seront horizontaux, et deux axes successifs seront perpendiculaires entre eux. On demande de projeter la chaîne sur un plan donné.

19. Un tore dont les dimensions sont données, et dont l'axe passe par un point donné, repose sur un plan donné. On demande : 1° de construire les deux projections de cette surface ; 2° d'obtenir les projections de la courbe suivant laquelle ce tore est touché par un cône circonscrit, dont le sommet est donné.

20. Le centre d'une sphère, de rayon donné, parcourt une hélice donnée, tracée sur un cylindre de révolution, dont l'axe est vertical. Dans son mouvement, la sphère est *enveloppée* par une *surface-canal*, dont on demande les deux projections.

21. Construire l'intersection d'un plan vertical quelconque, avec la surface-canal définie dans la question précédente.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE Ier.

Généralités sur les surfaces.

Pages.

Génération du plan, de la sphère, du cylindre et du cône. 1

Définition géométrique des surfaces. 2

Surfaces cylindriques.— Surfaces coniques.—Surfaces de révolution. 2

Surfaces du second ordre. 3

Surfaces réglées. — Elles se partagent en surfaces développables et en surfaces gauches. 5

Définition des surfaces développables et des surfaces gauches. 7

Une surface admet toujours plusieurs modes de génération.— Exemples. 9

Représentation graphique des surfaces.—Contours apparents. 10

CHAPITRE II.

Généralités sur les plans tangents.

Définition du plan tangent. 12

Propriété générale du plan tangent. 13

Cas d'exception. 14

Le plan tangent peut être situé de trois manières différentes à l'égard de la surface. 15

Conditions nécessaires pour déterminer le plan tangent. — Cas des surfaces réglées. 16

CHAPITRE III.

Plans tangents aux cylindres, aux cônes, aux surfaces gauches, aux surfaces développables, et aux surfaces de révolution.

Théorème. Le plan tangent en un point d'une surface cylindrique, est tangent tout le long de la génératrice qui passe en ce point. 17

Théorème. La projection de la tangente à une courbe est tangente à la projection de cette courbe. 17

Pages.

Théorème. Le plan tangent en un point d'une surface conique, est tangent tout le long de la génératrice qui passe en ce point. 18

Théorème. Tout plan, mené par une génératrice rectiligne d'une surface gauche, touche celle-ci au point où la génératrice rencontre la courbe d'intersection du plan et de la surface. 20

Théorème. Le plan tangent à une surface développable, en un point de l'arête de rebroussement, coupe la surface suivant la génératrice passant par ce point, et suivant une courbe tangente, en ce même point, à l'arête de rebroussement. 21

Théorème. Le plan tangent à une surface développable, en un point de l'arête de rebroussement, est tangent tout le long de la génératrice rectiligne qui passe en ce point. 22

Plan osculateur d'une courbe. 22

Théorème. Le plan tangent à une surface de révolution est perpendiculaire au plan méridien passant par le point de contact. 22

Théorème. 1° La normale en un point d'une surface de révolution est contenue dans le plan méridien passant par ce point; 2° les normales à la surface, menées par différents points d'un même parallèle, rencontrent l'axe en un même point. 23

Détermination du contour apparent d'une surface. 23

CHAPITRE IV.

Problèmes relatifs aux plans tangents.

Problème I. Mener un plan tangent à un cylindre donné, en un point pris sur la surface. 25

Problème II. Connaissant la directrice d'un cylindre et la direction de ses génératrices, construire le plan tangent à la surface, en un point pris sur celle-ci. 27

Problème III. Mener un plan tangent à un cylindre, par un point extérieur à la surface. 28

Problème IV. Mener un plan tangent à un cylindre, parallèlement à une droite donnée. 28

Pages.

PROBLÈME V. Mener un plan tangent à un cône donné, en un point pris sur la surface. 29

PROBLÈME VI. Mener un plan tangent à une surface de révolution dont le méridien est donné, connaissant le point de contact. 30

PROBLÈME VII. Mener un plan tangent à une surface de révolution dont le méridien n'est pas donné, connaissant le point de contact. 32

Cas d'une génératrice rectiligne. 33

PROBLÈME VIII. Par une droite donnée, faire passer un plan tangent à une sphère donnée. 34

PROBLÈME IX. Mener à une surface de révolution, dont le méridien est connu, une normale parallèle à une droite donnée. 36

CHAPITRE V.

Sections planes des cylindres et des cônes.

PROBLÈME X. Trouver : 1° l'intersection d'un cylindre vertical et d'un plan perpendiculaire au plan vertical ; 2° la tangente en un point de l'intersection ; 3° etc. 38

THÉORÈME. Toute ligne, tracée sur une surface développable, est de même longueur que sa transformée. 43

THÉORÈME. Si l'on considère, sur une surface développable et sur son développement, une ligne quelconque et sa transformée, les tangentes à ces deux lignes, en deux points correspondants, sont également inclinées sur la génératrice passant par ce premier point et sur la transformée de celle-ci. 44

DE L'HÉLICE. 44

THÉORÈME. Les hélices tracées sur un cylindre quelconque sont des courbes à double courbure. 45

THÉORÈME. Dans l'hélice, la sous-tangente est égale à l'abscisse curviligne. 46

THÉORÈME. Le lieu du point où la tangente à l'hélice perce le plan d'une section droite du cylindre, est une développante de cette section droite. 46

THÉORÈME. Le plus court chemin entre deux points, sur la surface d'un cylindre, est le plus petit des arcs d'hélices terminés à ces deux points. 47

Pages.

Problème XI. Trouver : 1° les projections de la section droite d'un cylindre quelconque ; 2° le rabattement de cette courbe ; 3° le développement du cylindre, etc. 48

Problème XII. Trouver : 1° l'intersection d'un cône de révolution et d'un plan perpendiculaire au plan vertical ; 2° la tangente en un point de l'intersection, etc. 54

Problème XIII. Trouver : 1° les projections de la section faite dans un cône, par un plan quelconque ; 2° le développement du cône ; 3° la transformée de la section, etc. 63

CHAPITRE VI.

SURFACES RÉGLÉES.

Des surfaces développables.

Recherche de la loi suivant laquelle doit se mouvoir une droite, pour engendrer une surface développable :

1° Une surface développable est le lieu des positions d'une droite qui roule, sans glissement, sur une courbe à double courbure donnée, en lui demeurant tangente ;

2° Dans ce mouvement, chaque point de la génératrice décrit une courbe à laquelle la génératrice est normale ; en sorte que cette courbe est une trajectoire orthogonale de toutes les génératrices ;

3° Cette trajectoire orthogonale des génératrices présente un rebroussement au point où elle coupe la directrice ;

4° La directrice donnée, ou l'arête de rebroussement de la surface développable, partage cette surface en deux nappes tangentes l'une à l'autre le long de cette arête. 67

Théorème. L'arête de rebroussement d'une surface développable et la transformée de cette ligne ont, en deux points correspondants, leurs cercles osculateurs égaux. 70

Théorème. Le plan osculateur en un point de l'arête de rebroussement se confond avec le plan tangent, en ce point, à la surface développable. 70

Des surfaces gauches.

Théorème. Toute surface réglée qui admet une directrice rectiligne, est gauche. 71

Pages

Théorème. Toute surface réglée, à plan directeur, est gauche. 72

Héliçoïde développable. Génération et propriétés. 73

Héliçoïde gauche. Diverses espèces d'héliçoïdes gauches. Leurs modes de génération. 75

Théorème. Si une droite se meut en coupant une courbe donnée, de manière que la projection de la génératrice, faite sur un certain plan, soit toujours tangente à la projection de la directrice; la surface engendrée sera gauche. 76

Hyperboloïde de révolution. Génération et propriétés. 77

CHAPITRE VII.

Sections planes des surfaces réglées.

Problème XIV. 1° Représenter graphiquement l'héliçoïde développable; 2° construire un plan tangent à cette surface; 3° déterminer la section faite par ce plan, etc. 82

Problème XV. 1° Représenter graphiquement l'héliçoïde de la vis à filet triangulaire; 2° construire le plan tangent à cette surface, en un point, etc. 92

CHAPITRE VIII.

Sections planes des surfaces de révolution.

Problème XVI. Construire la section faite, par un plan, dans un hyperboloïde de révolution, à une nappe. 96

Problème XVII. Construire la courbe d'intersection d'un plan et d'un tore. 100

Théorème de M. Yvon Villarceau. 102

CHAPITRE IX.

Intersection de deux surfaces courbes.

Indication de la méthode à suivre pour résoudre la question, dans le cas général. 104

Théorème. La tangente en un point quelconque de la courbe d'intersection de deux surfaces est, en général, l'intersection des plans respectivement tangents aux deux surfaces, en ce point. 106

Pages.

THÉORÈME. La tangente en un point quelconque de la courbe d'intersection de deux surfaces, est perpendiculaire au plan des normales menées, par ce point, à ces surfaces. 106

PROBLÈME XVIII. Intersection de deux cylindres. 107

PROBLÈME XIX. Intersection de deux cônes. 112

PROBLÈME XX. Intersection de deux surfaces de révolution, dont les axes se rencontrent. 114

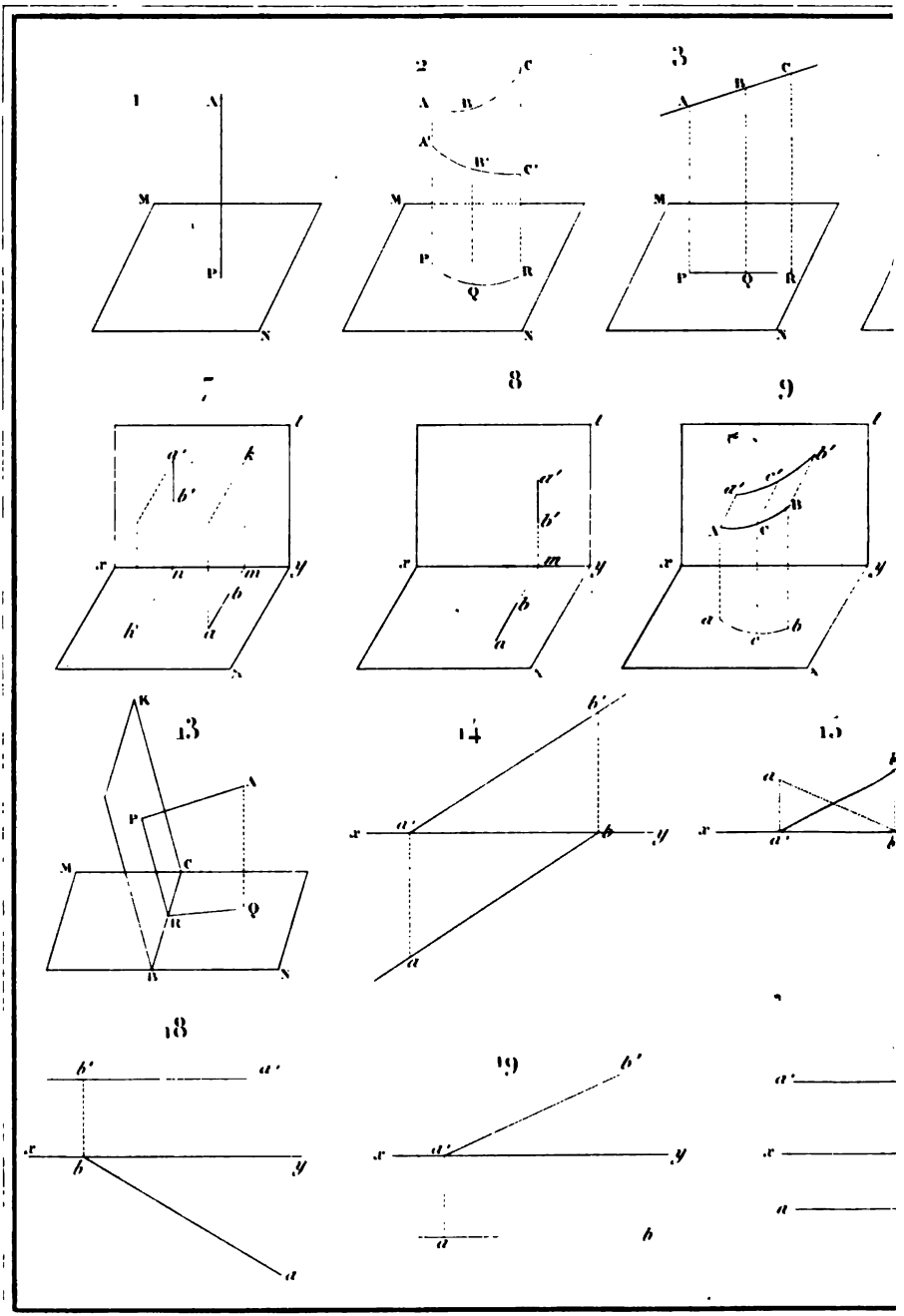
APPENDICE

Sur les changements de projection.

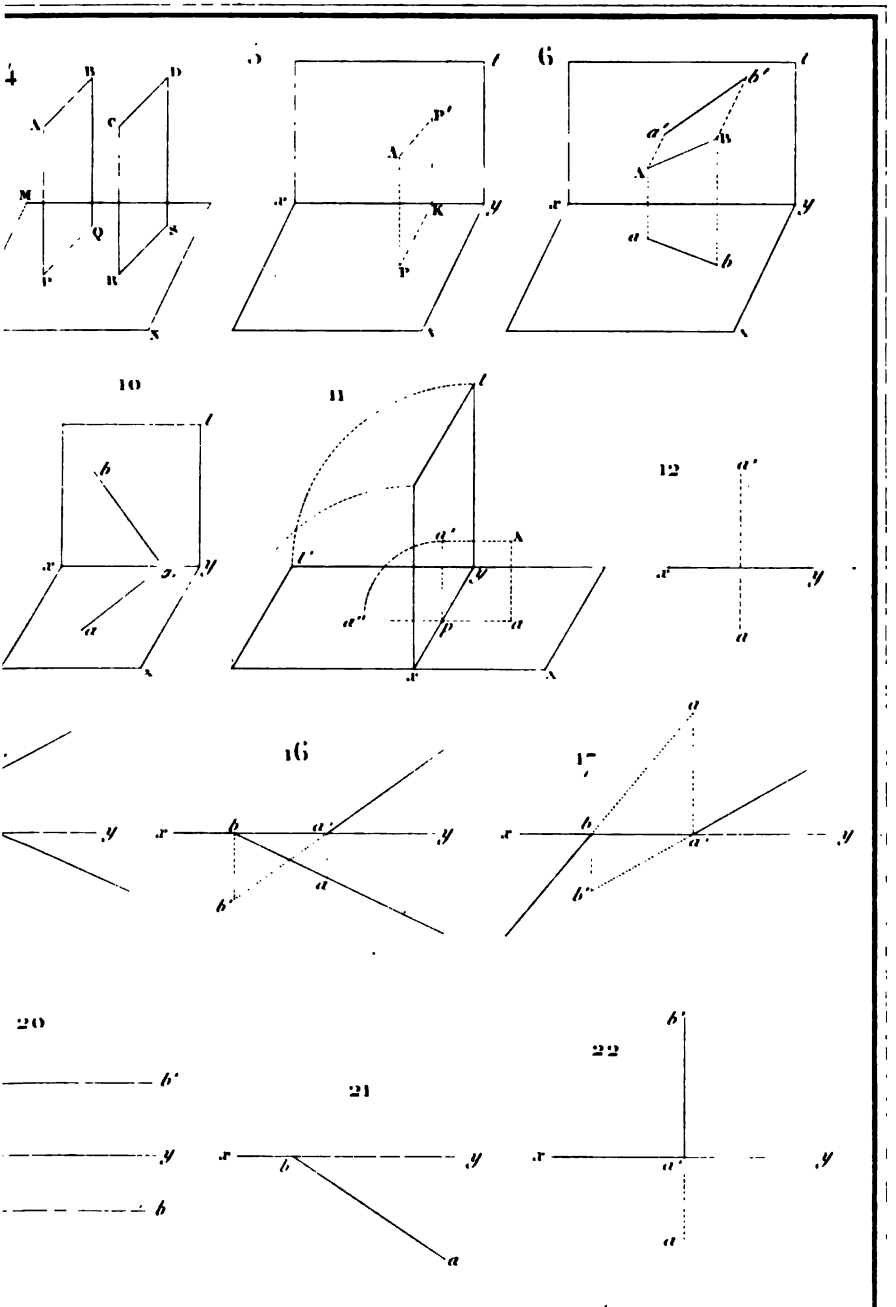
PROBLÈME. 121

EXERCICES. 123

FIN DE LA TABLE.

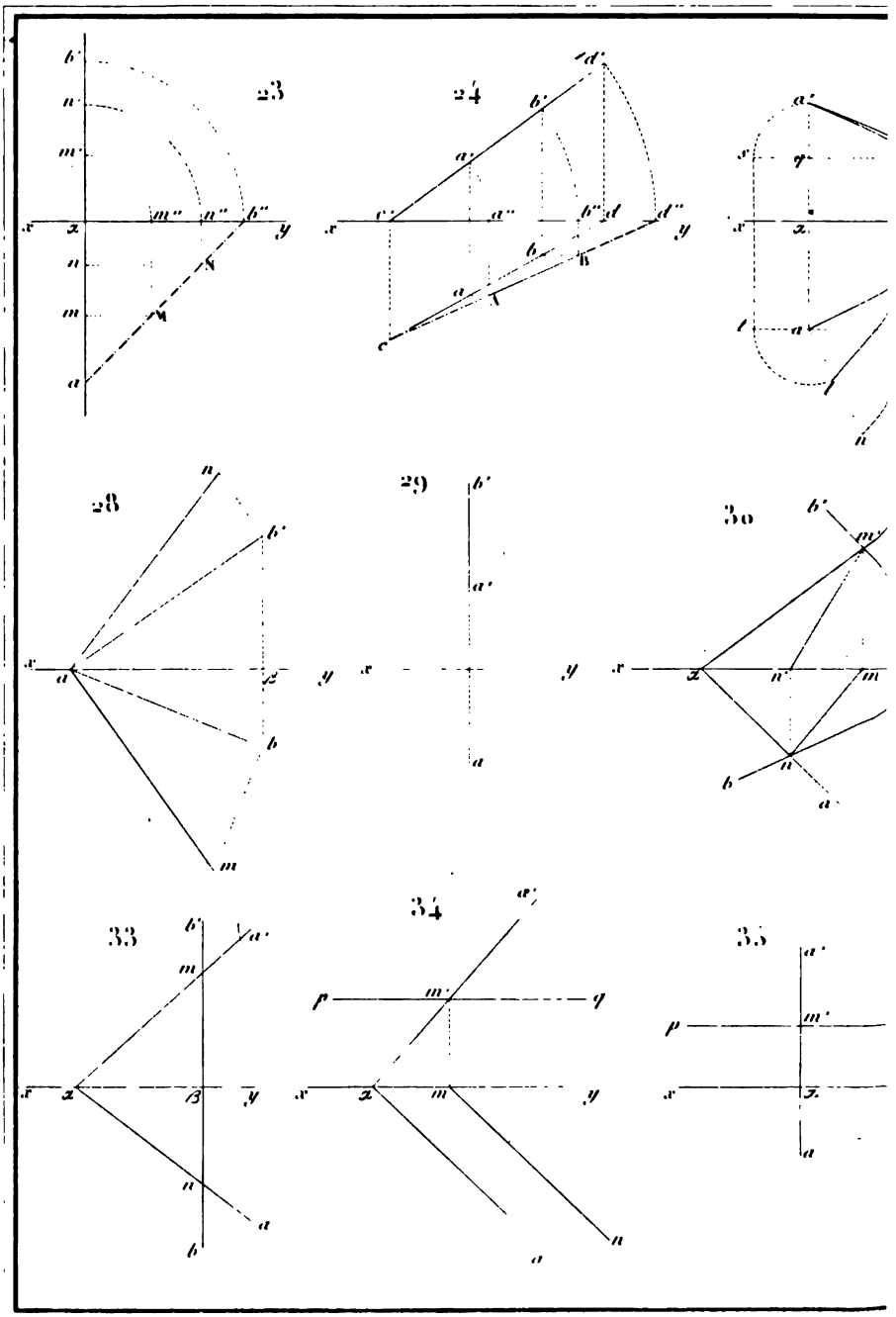


De Lafremoire del

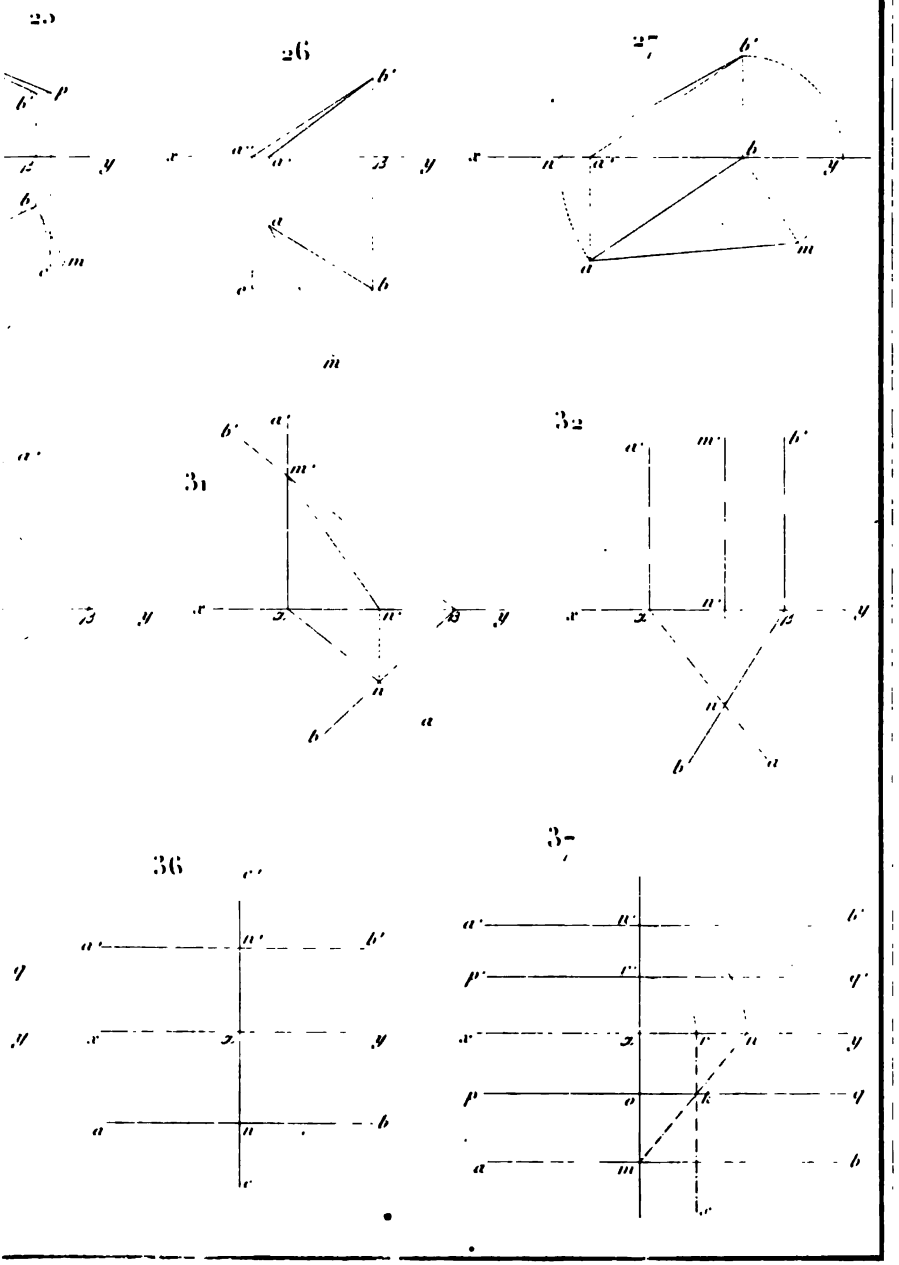


Ribon sc.

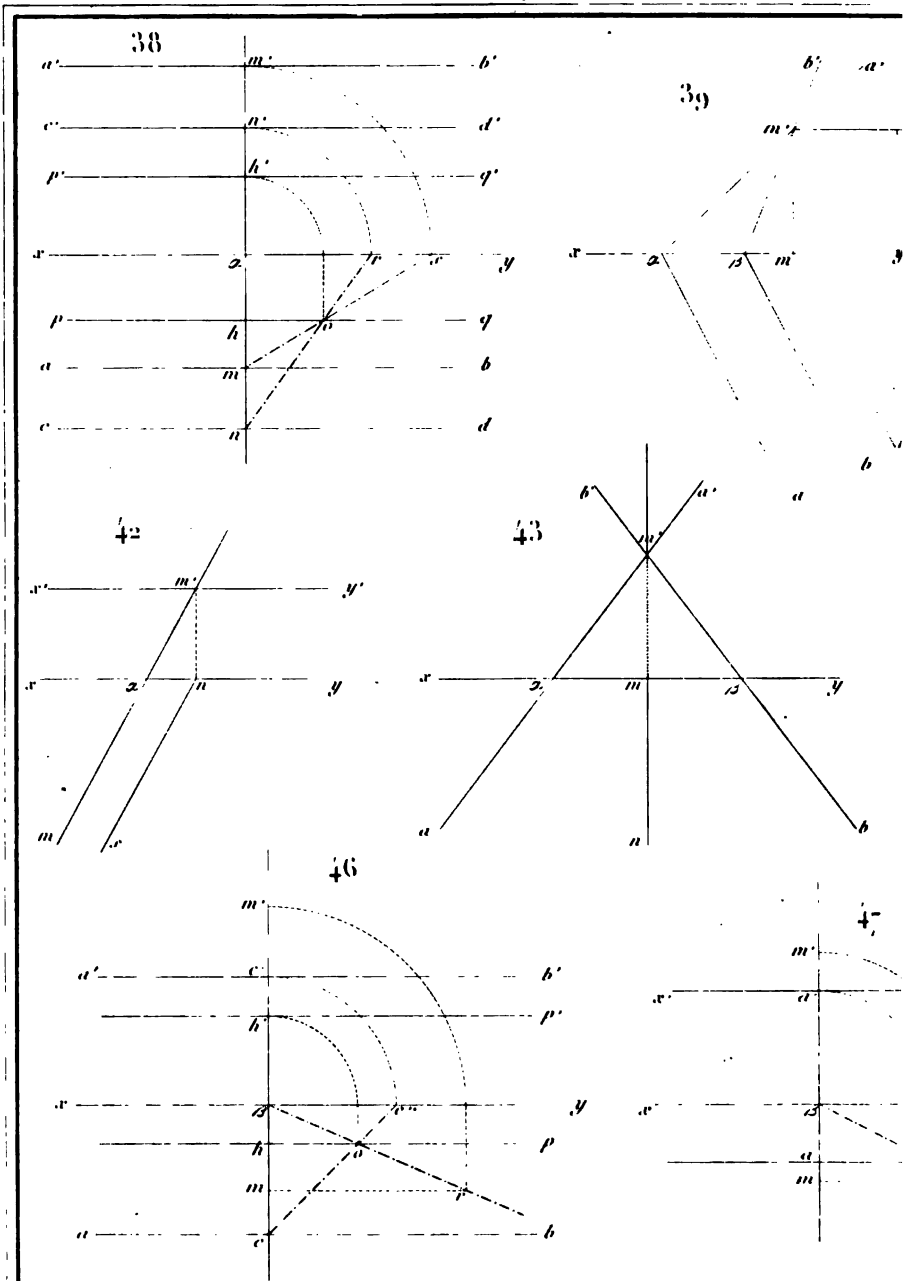
UNIV. OF MICH.



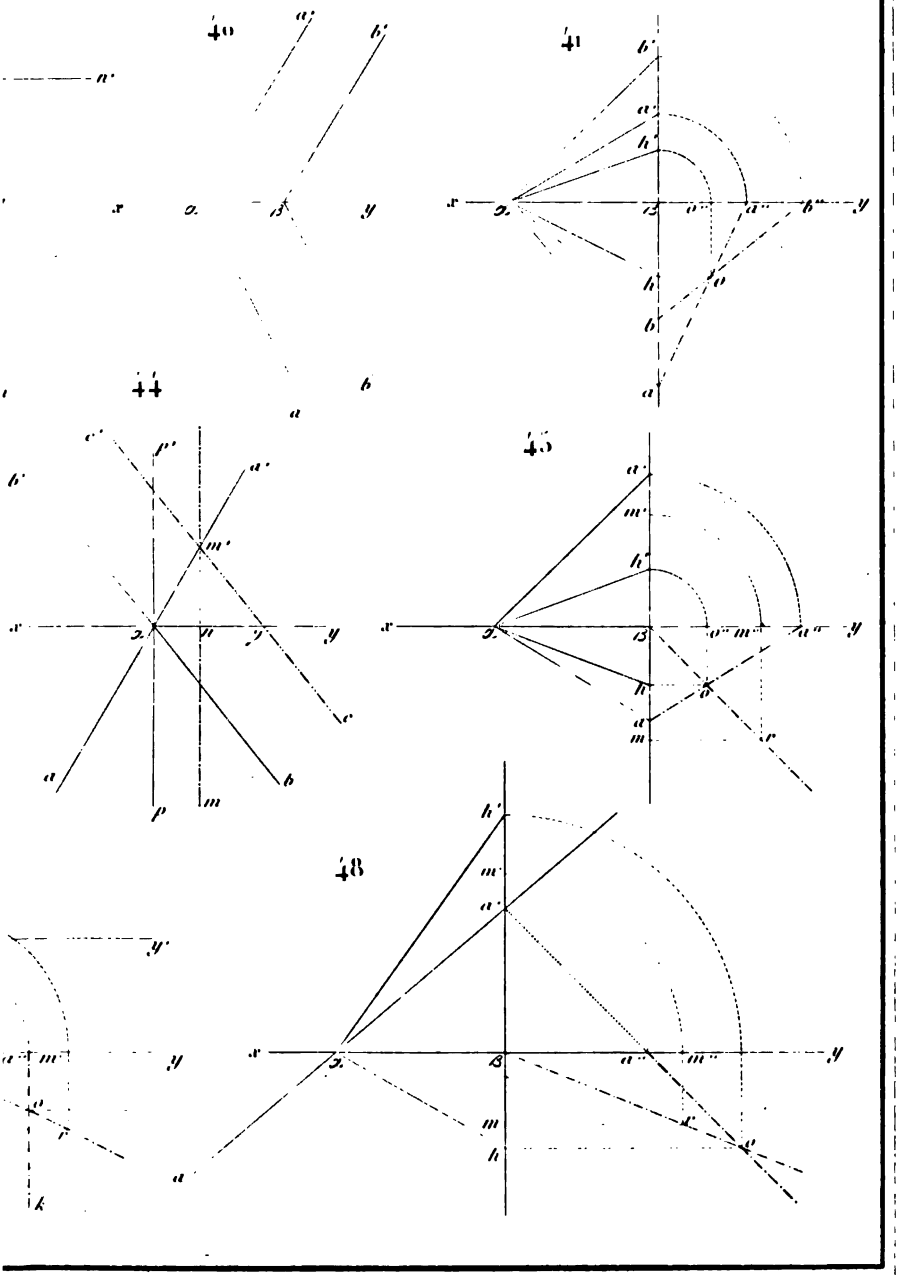
Lecatremore del



U. L. OF B.

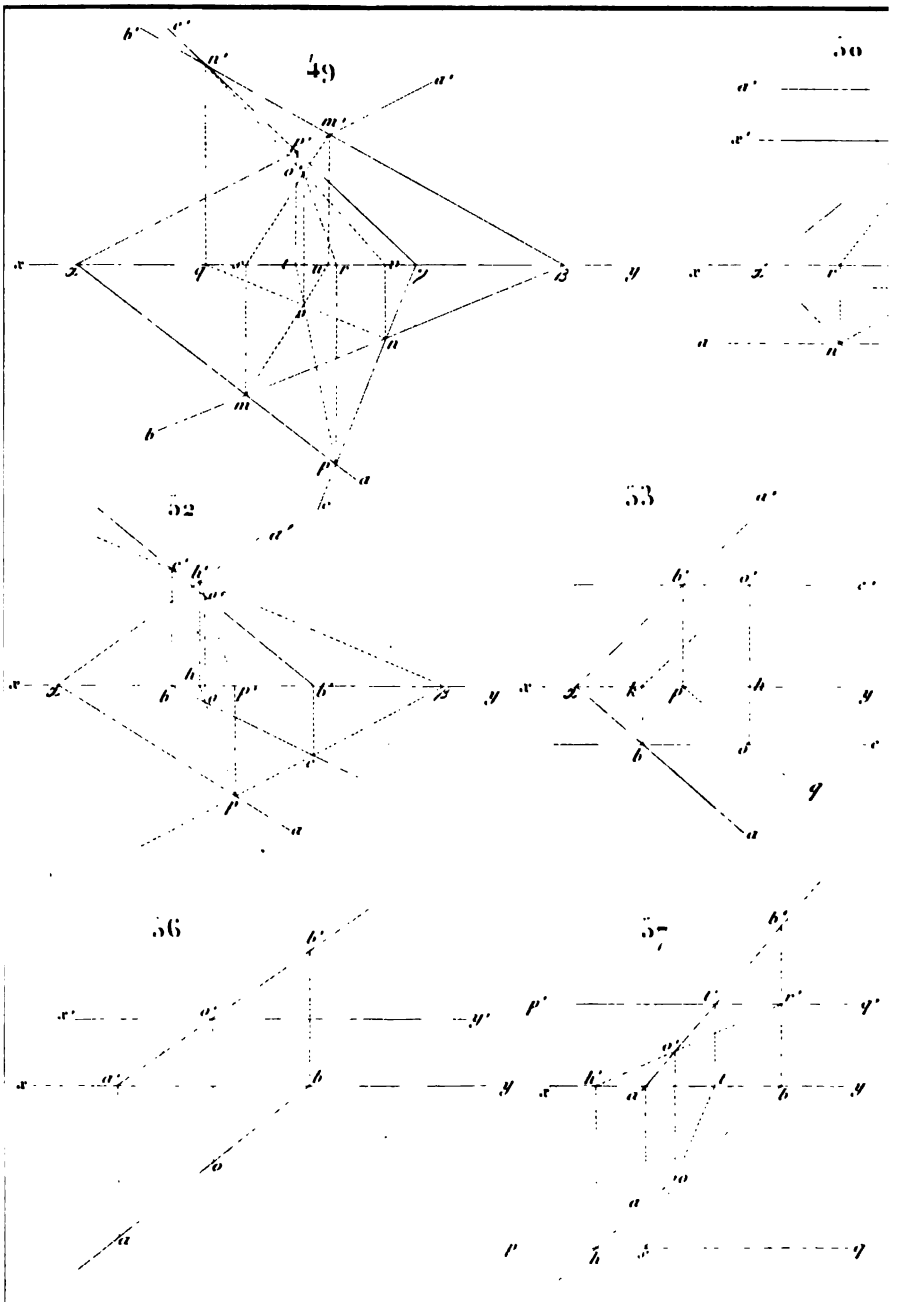


De Lafrémoire del

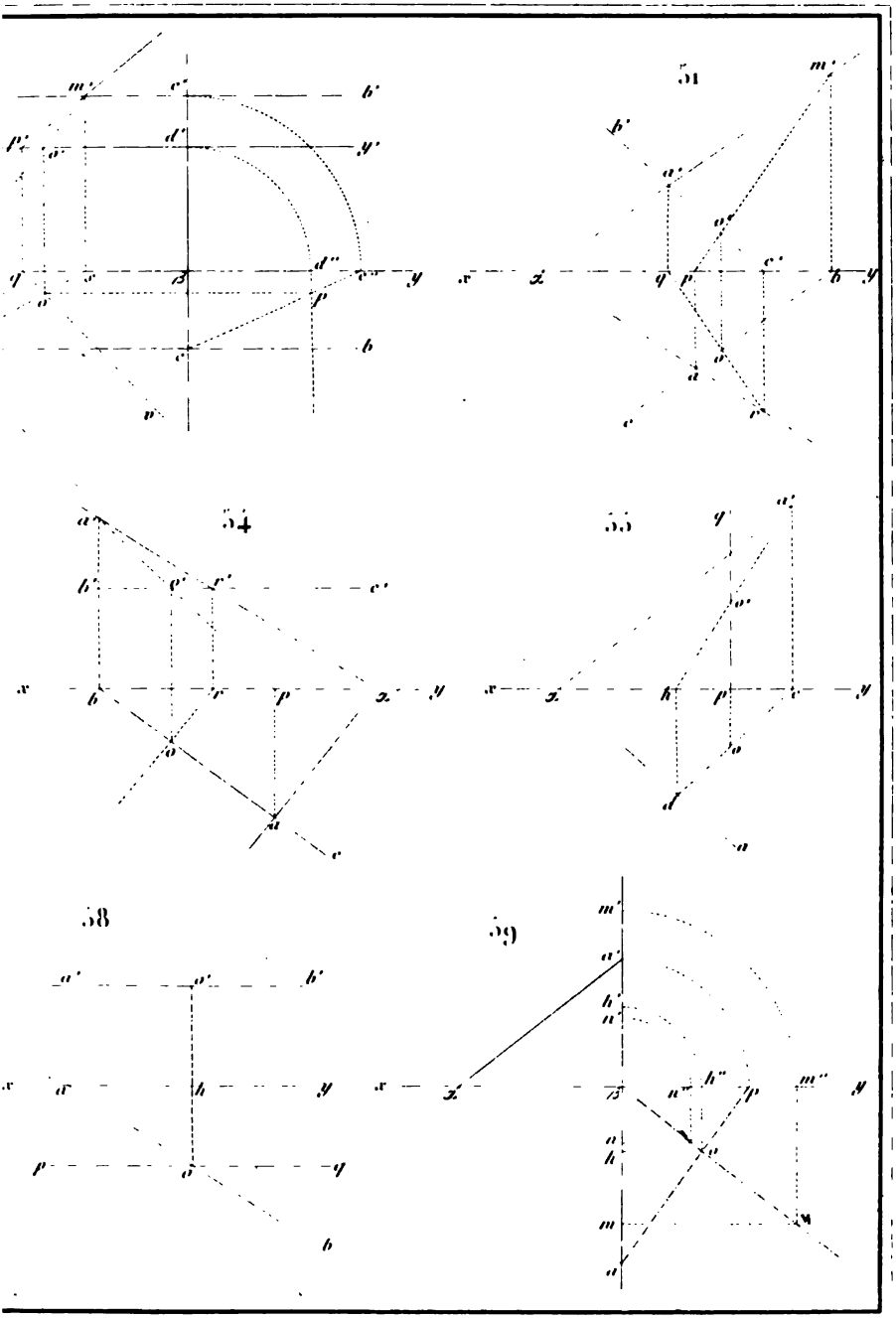


Hibon sc.

UNIV. OF MICH.

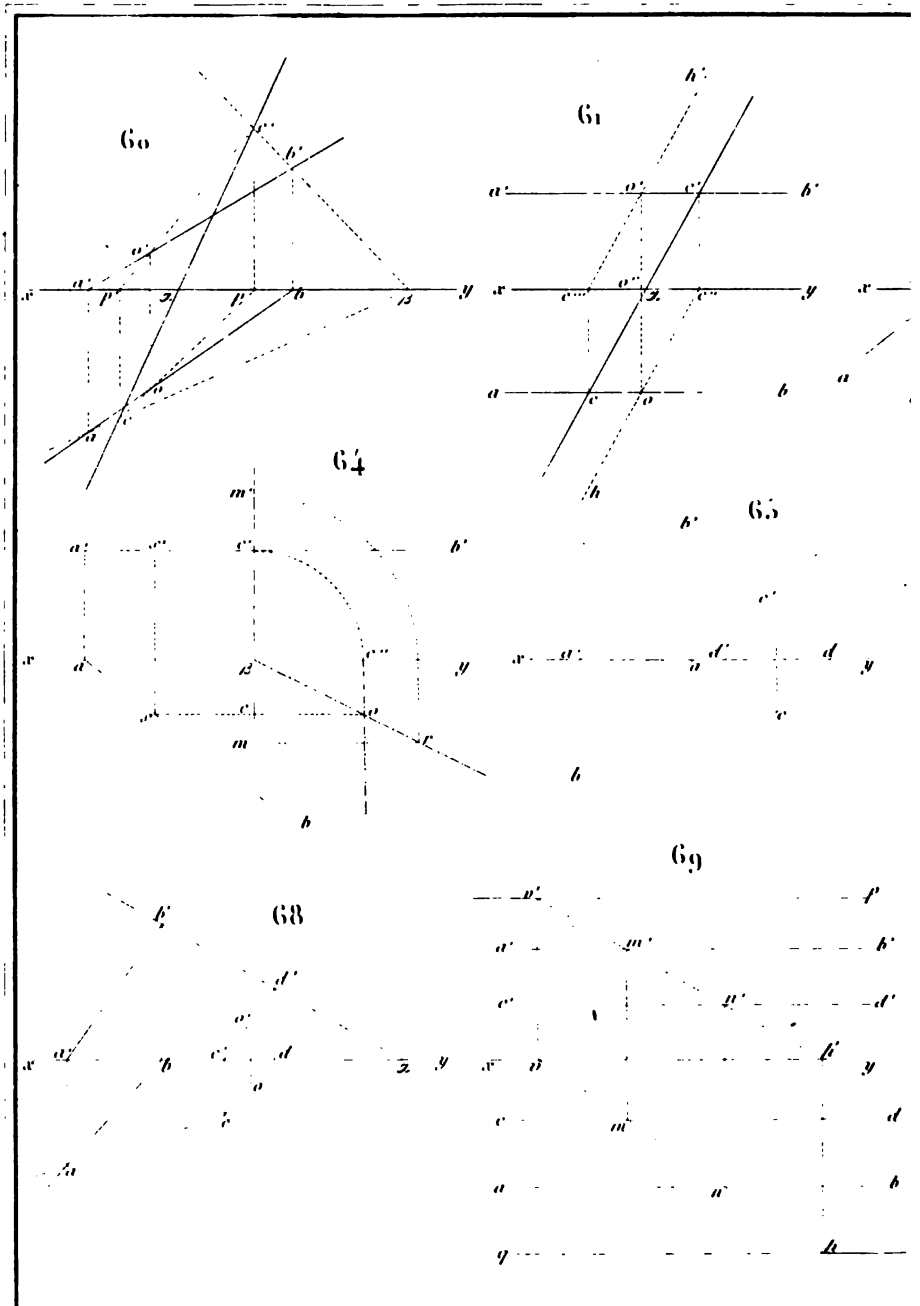


Pl. Lafitemoux del.

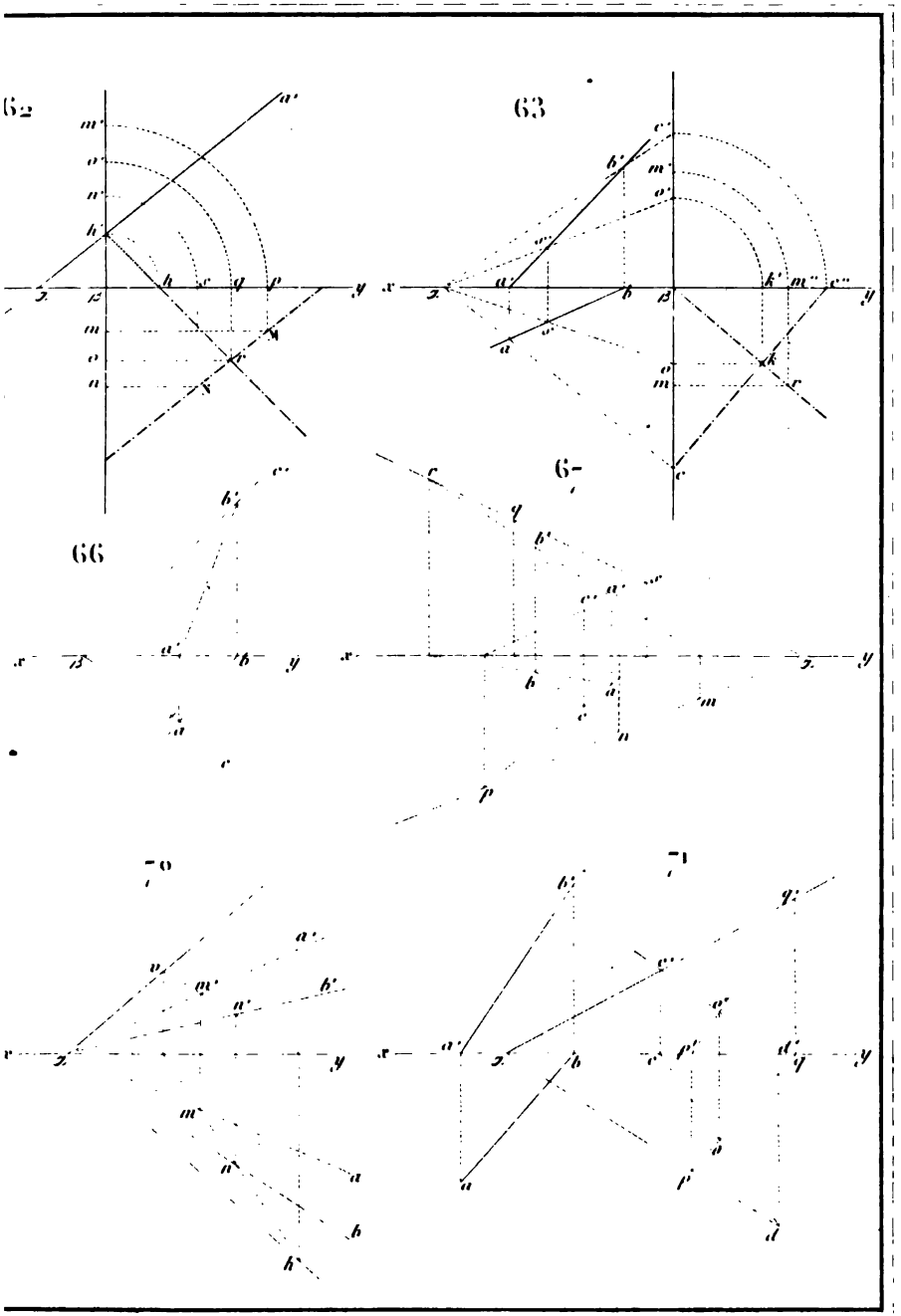


Ilibon sc.

UNIV. OF M



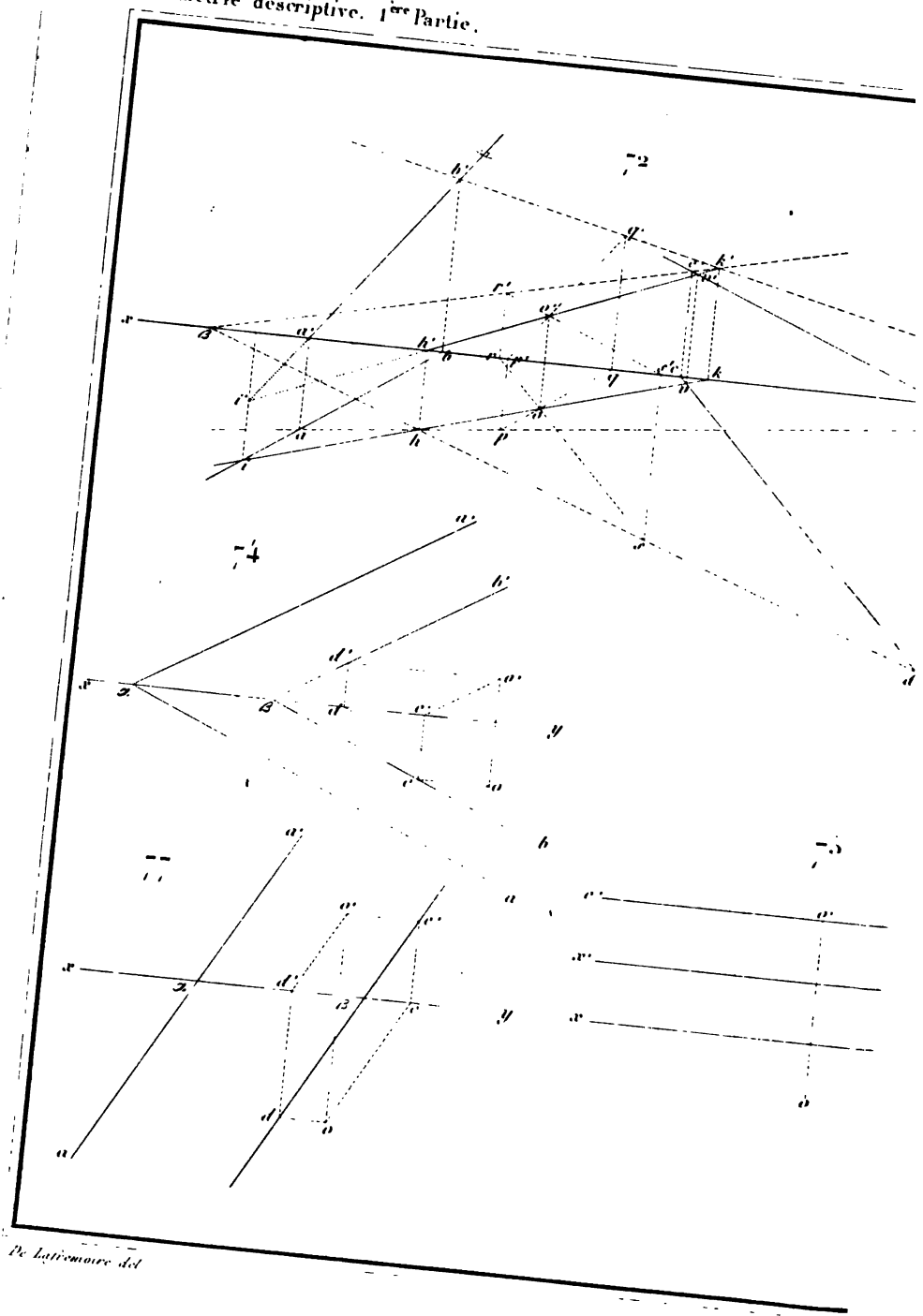
Pl. Latrémoire del.



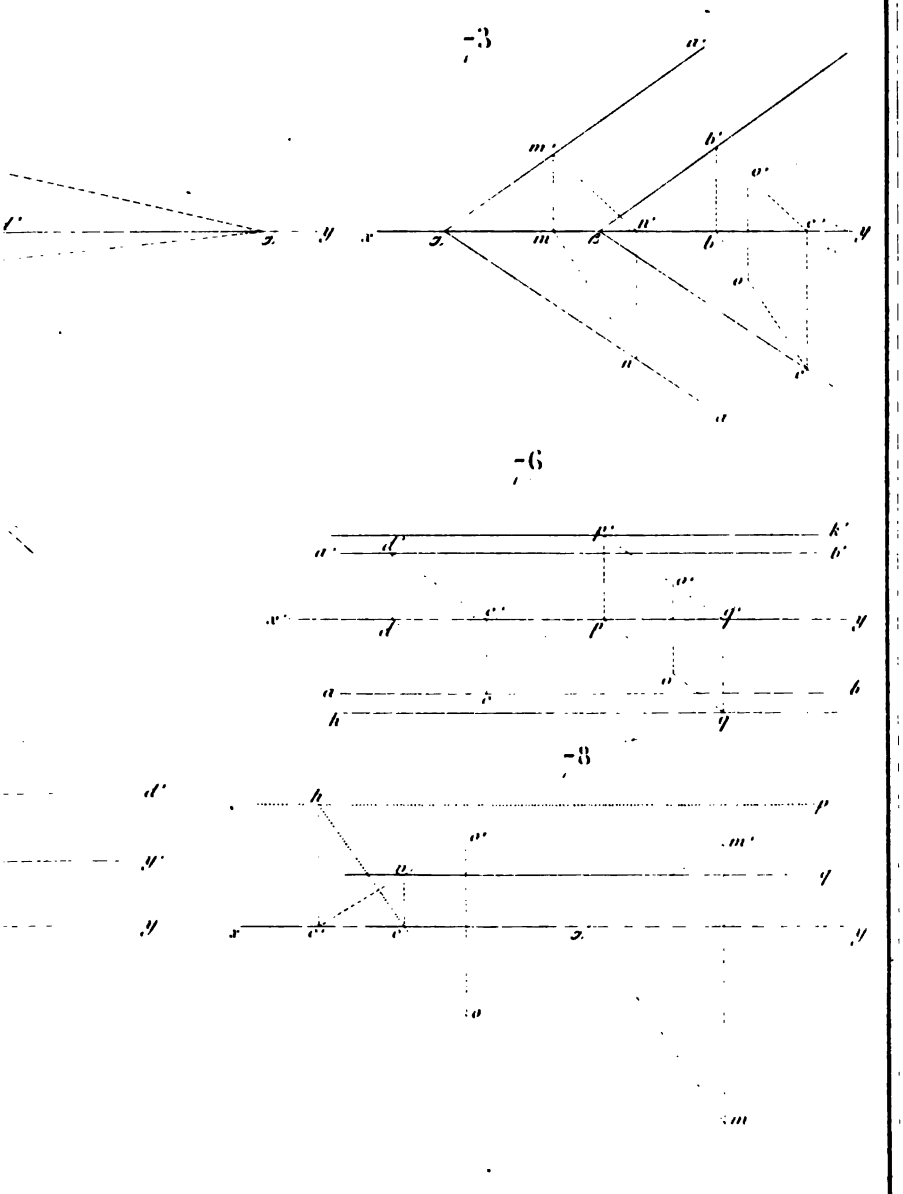
Hibon sc

UNIV. OF MICH.

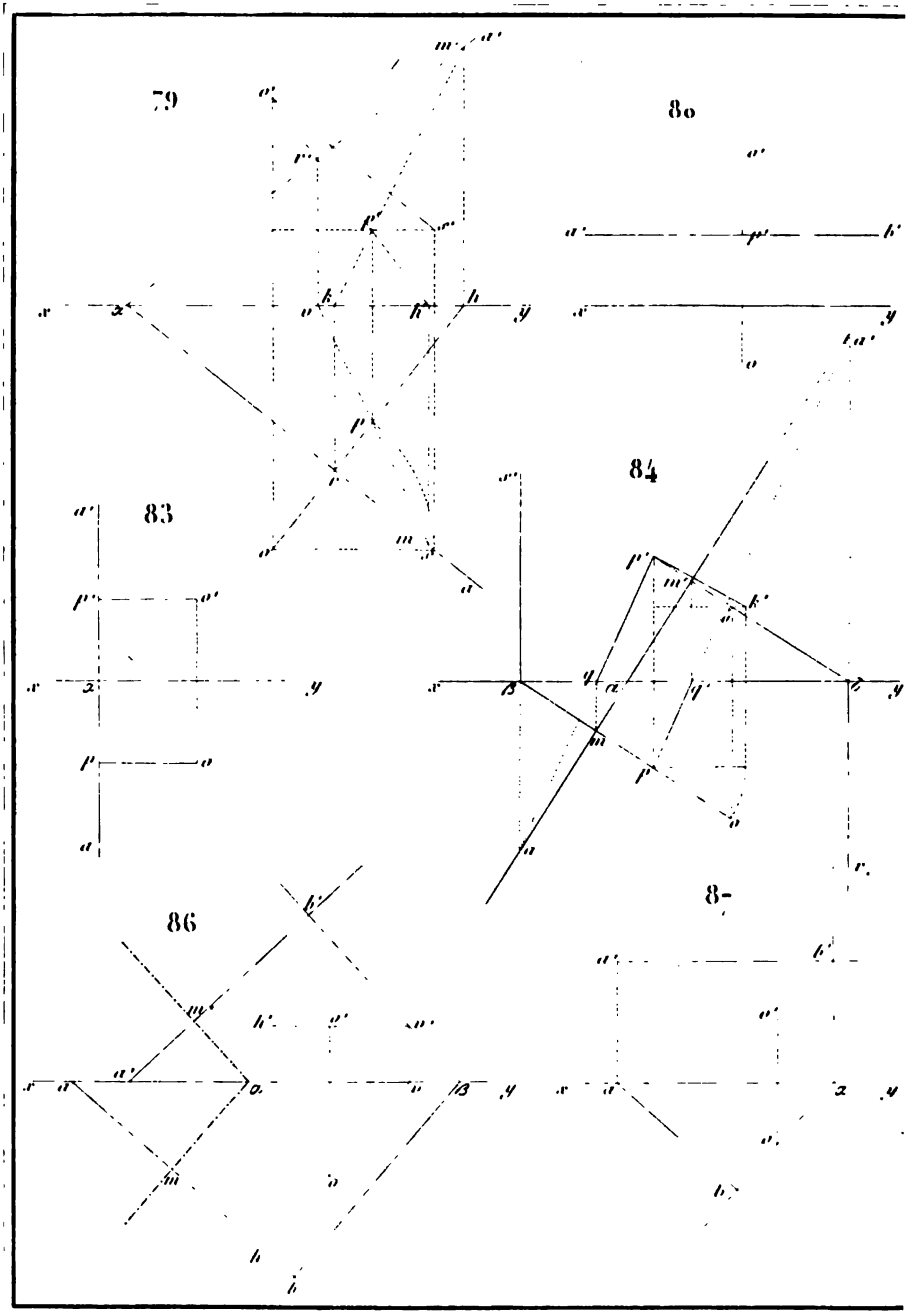
Géométrie descriptive. 1ère Partie.



Pc Latrémoire del

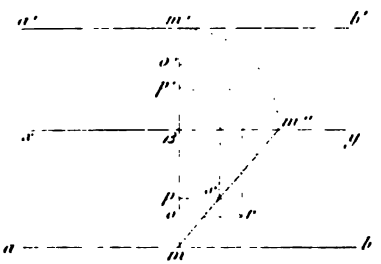


Urban UNIV. OF MICH.

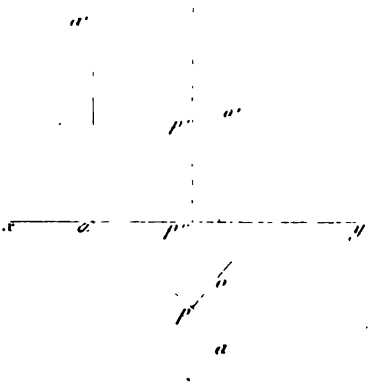


De Lafremoire del.

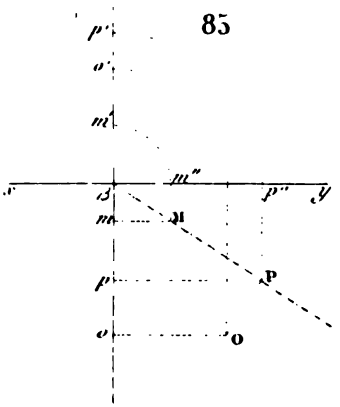
81



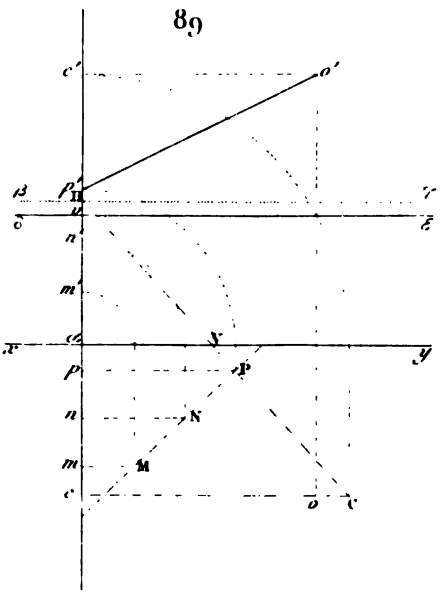
82



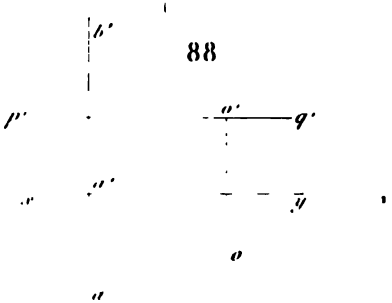
85



89

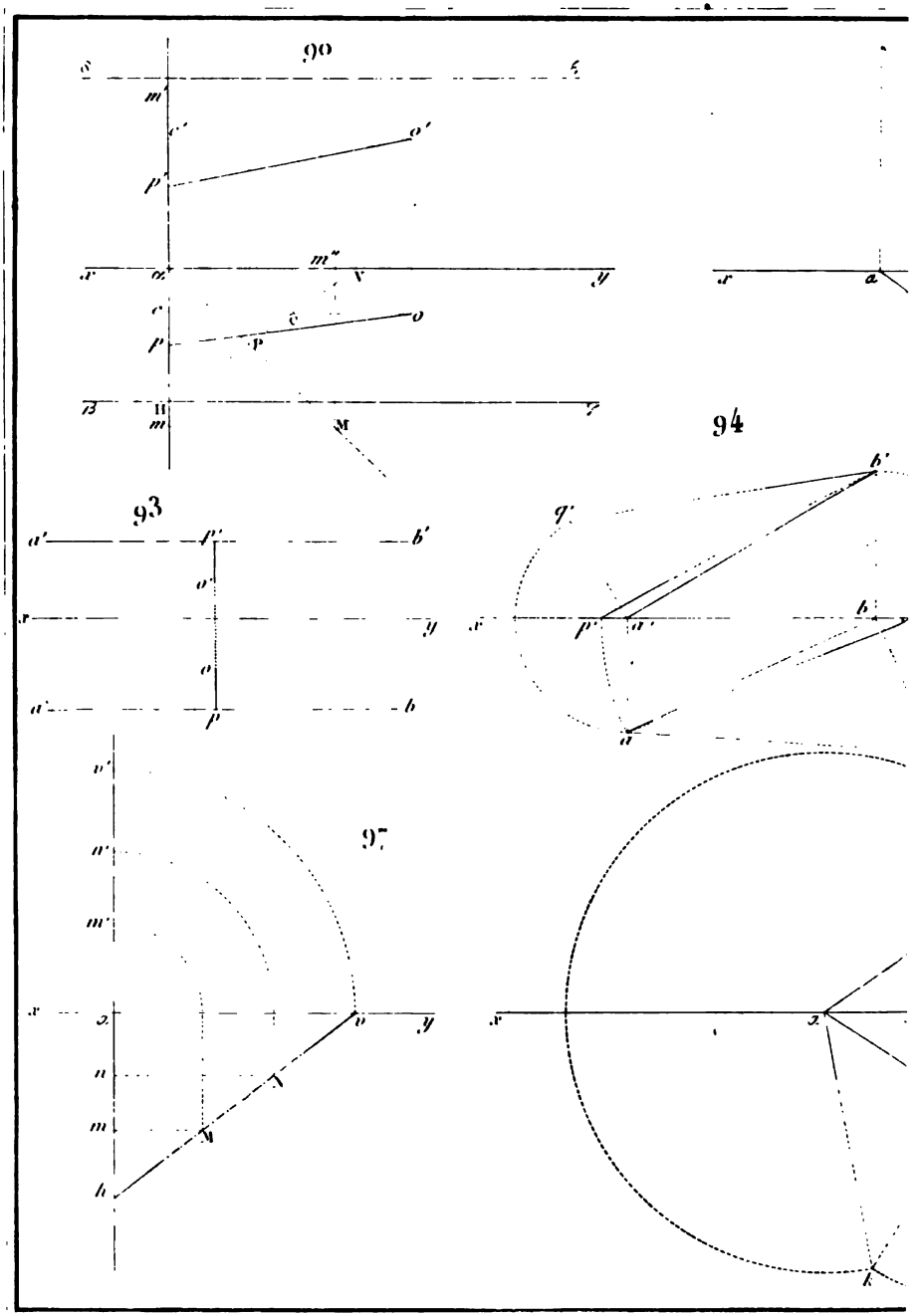


88

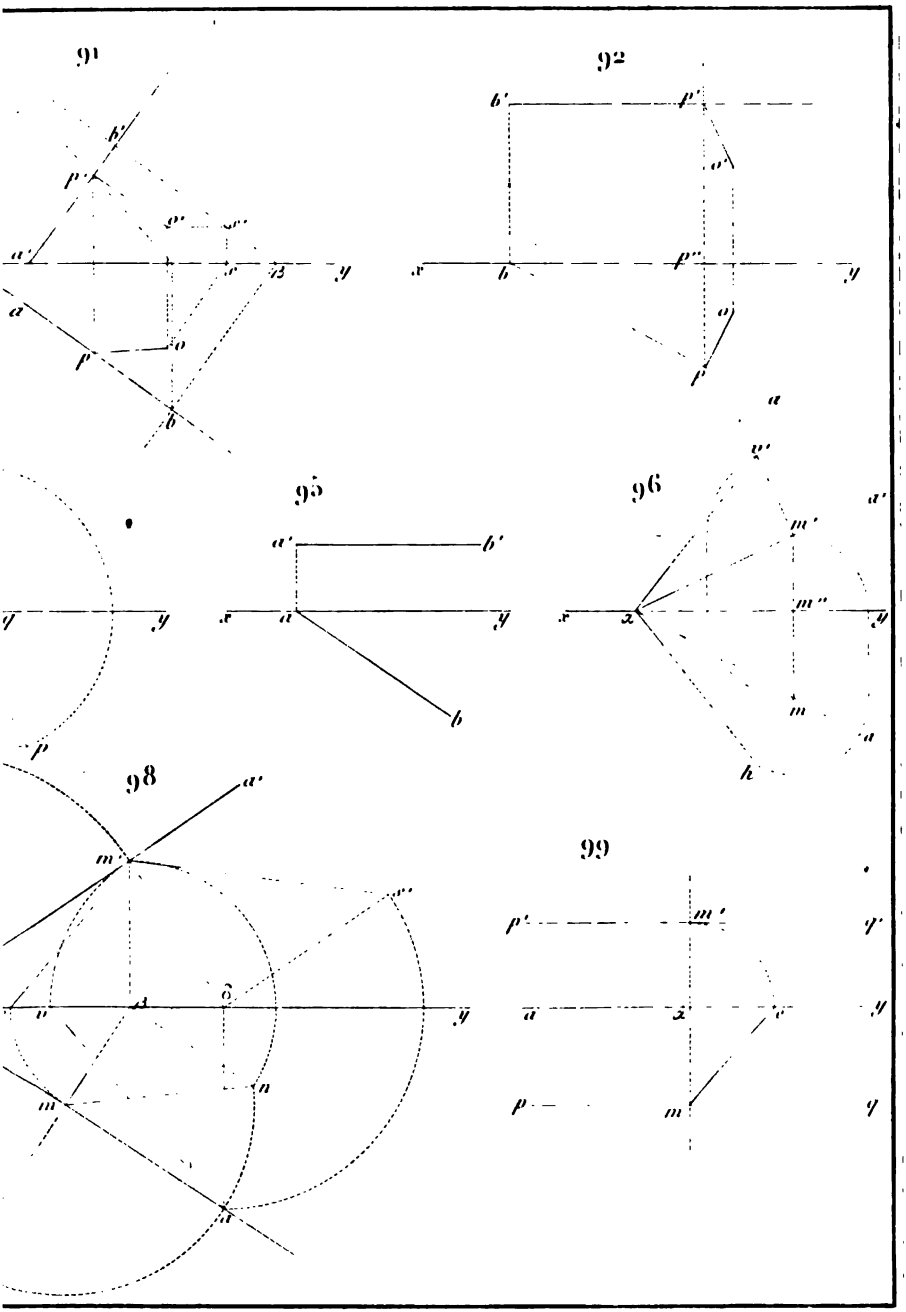


Ribon sc.

UNIV. OF MICH.

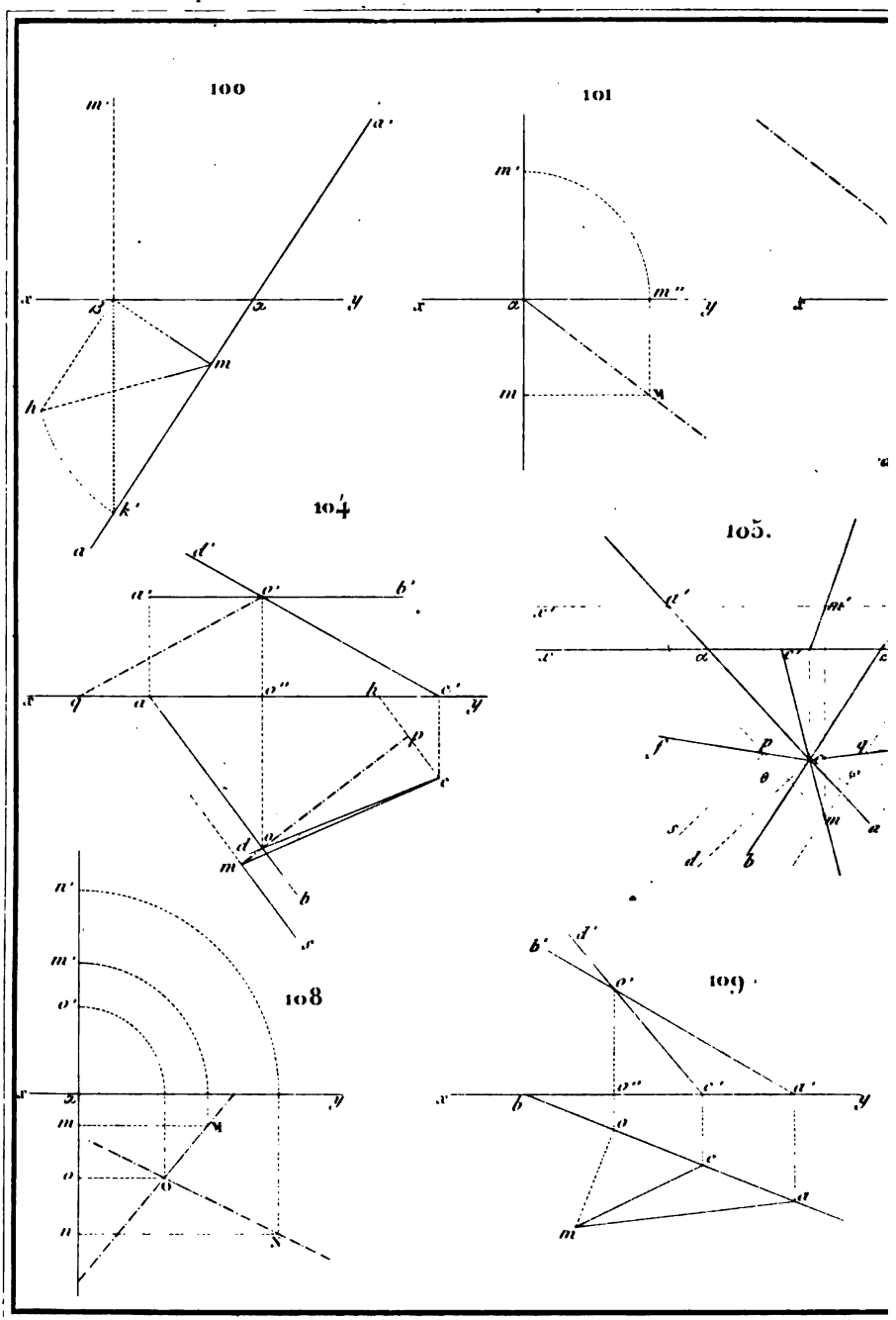


Pl. Lafremoire del



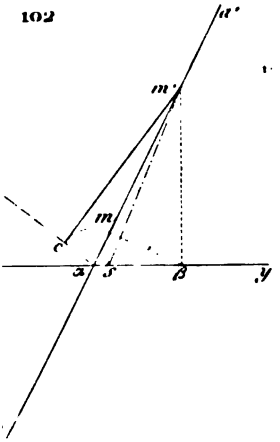
Ribon sc.

UNIV. OF MIC

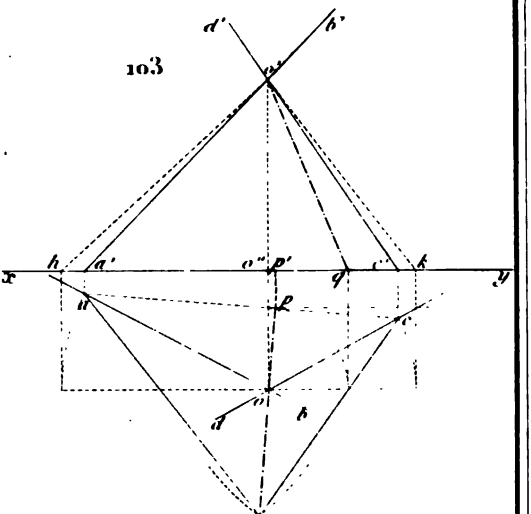


De Lafremoure del.

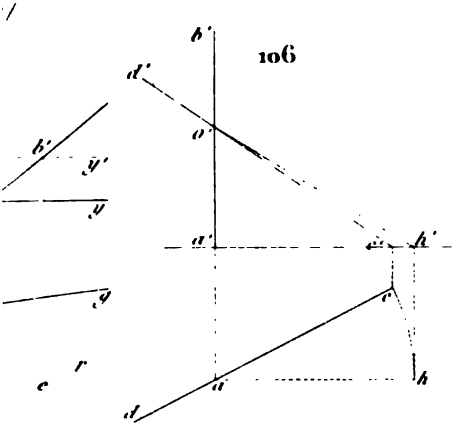
102



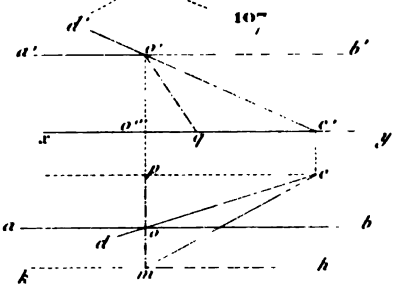
103



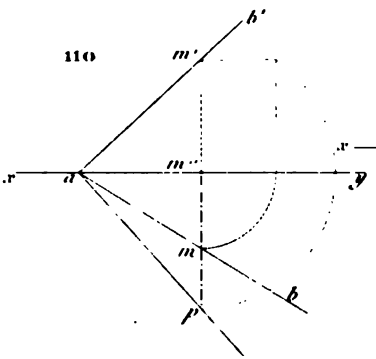
106



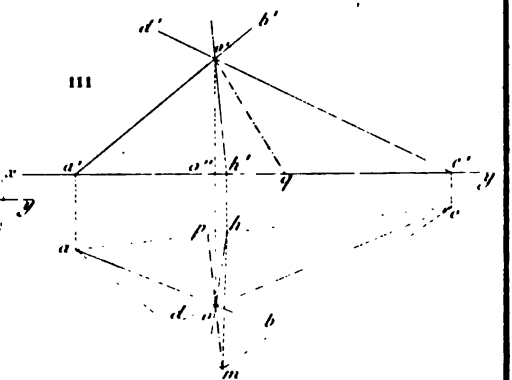
107



110

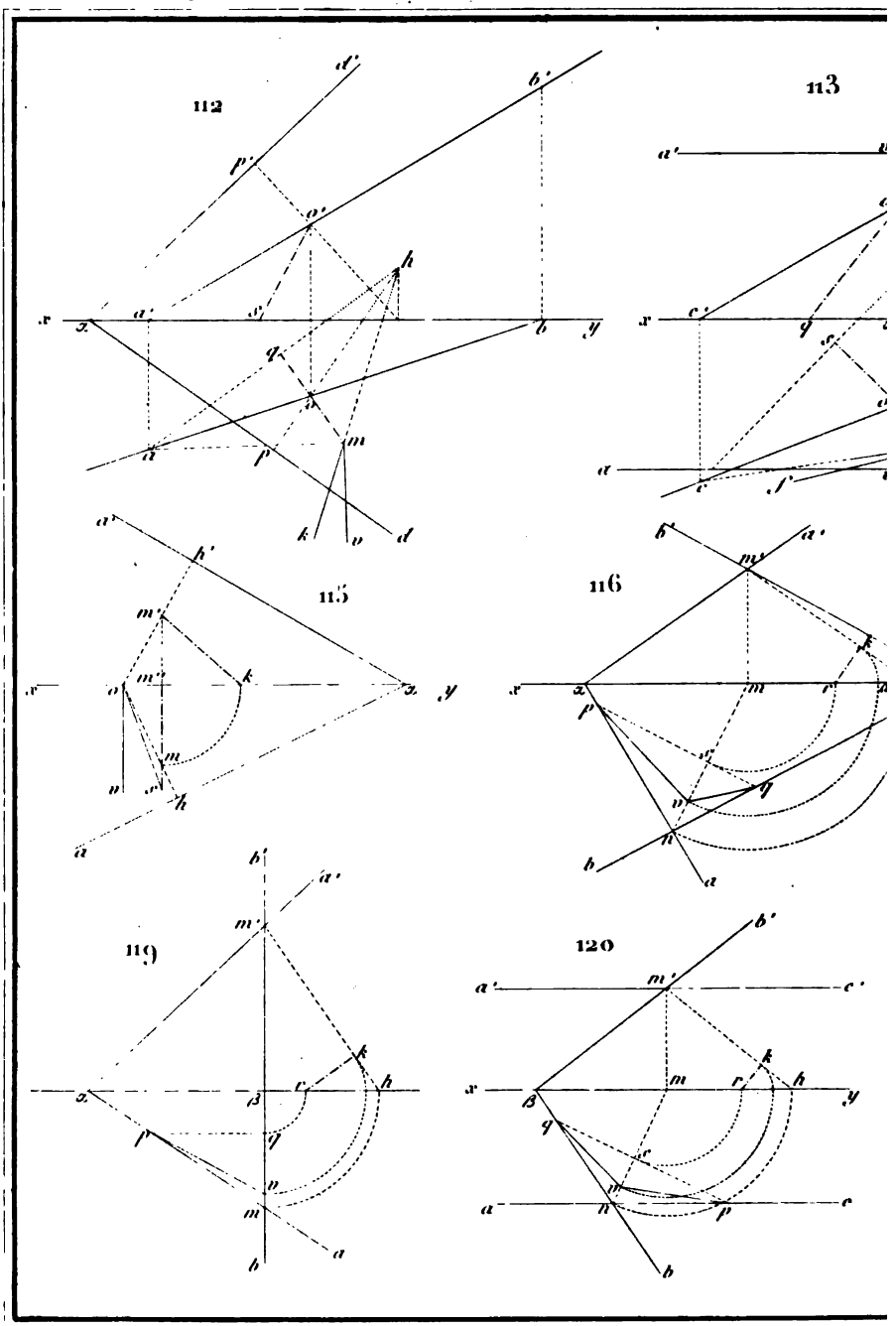


111

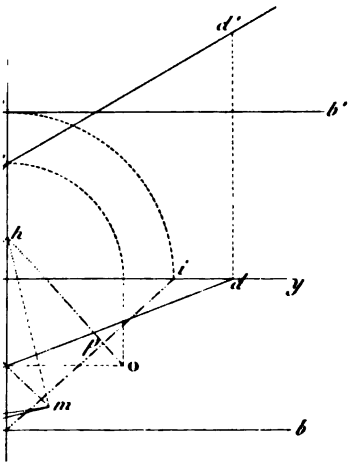


Ribon sc

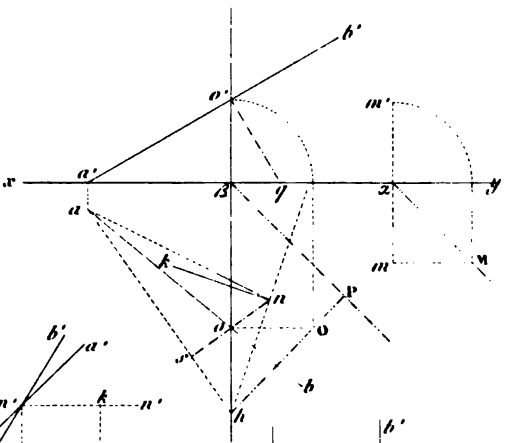
UNIV. OF



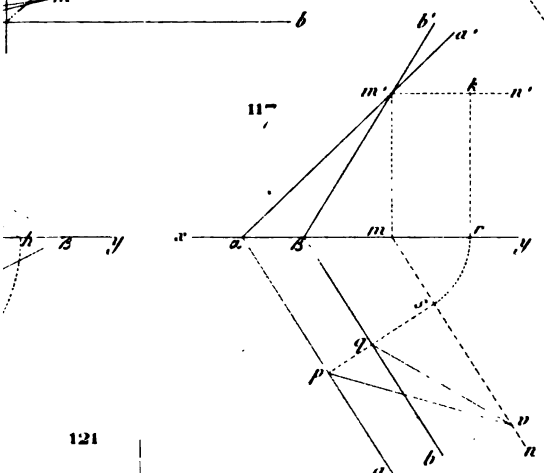
De Lafremoire del.



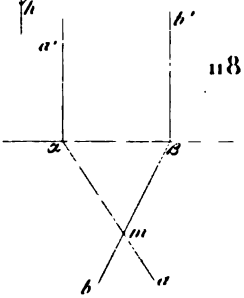
114



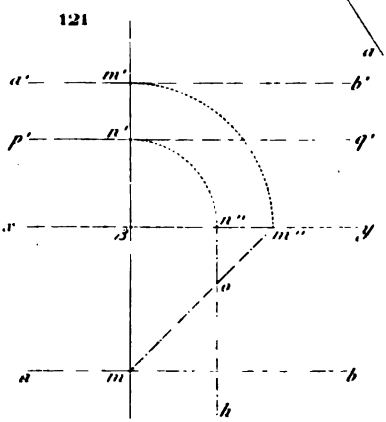
117



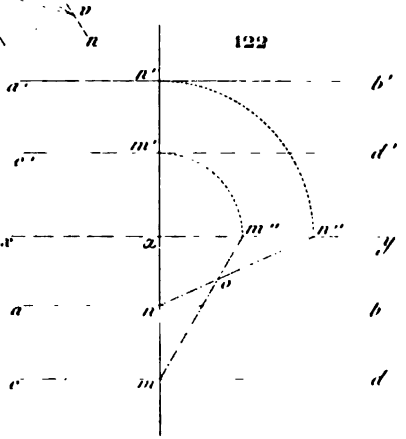
118

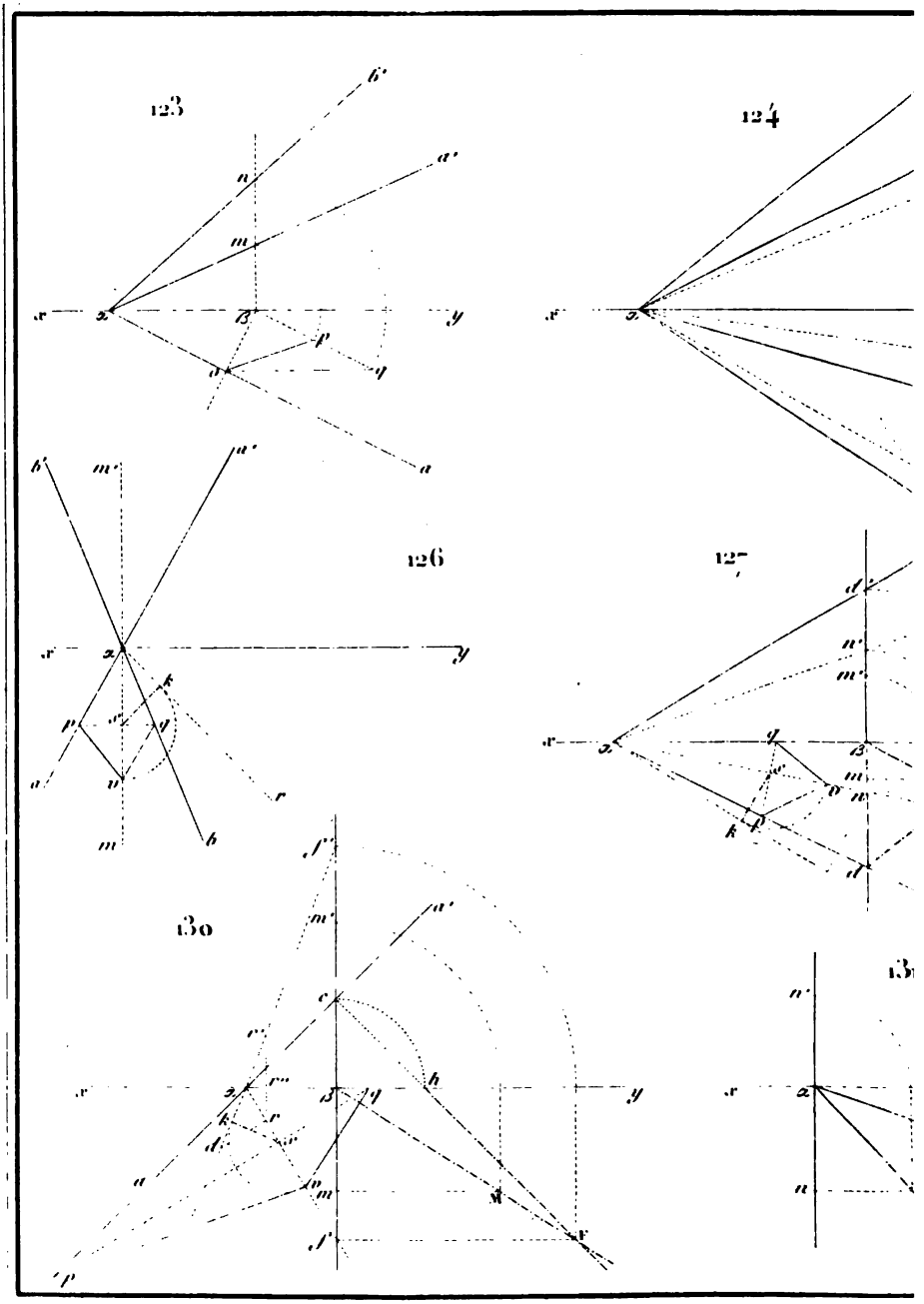


121

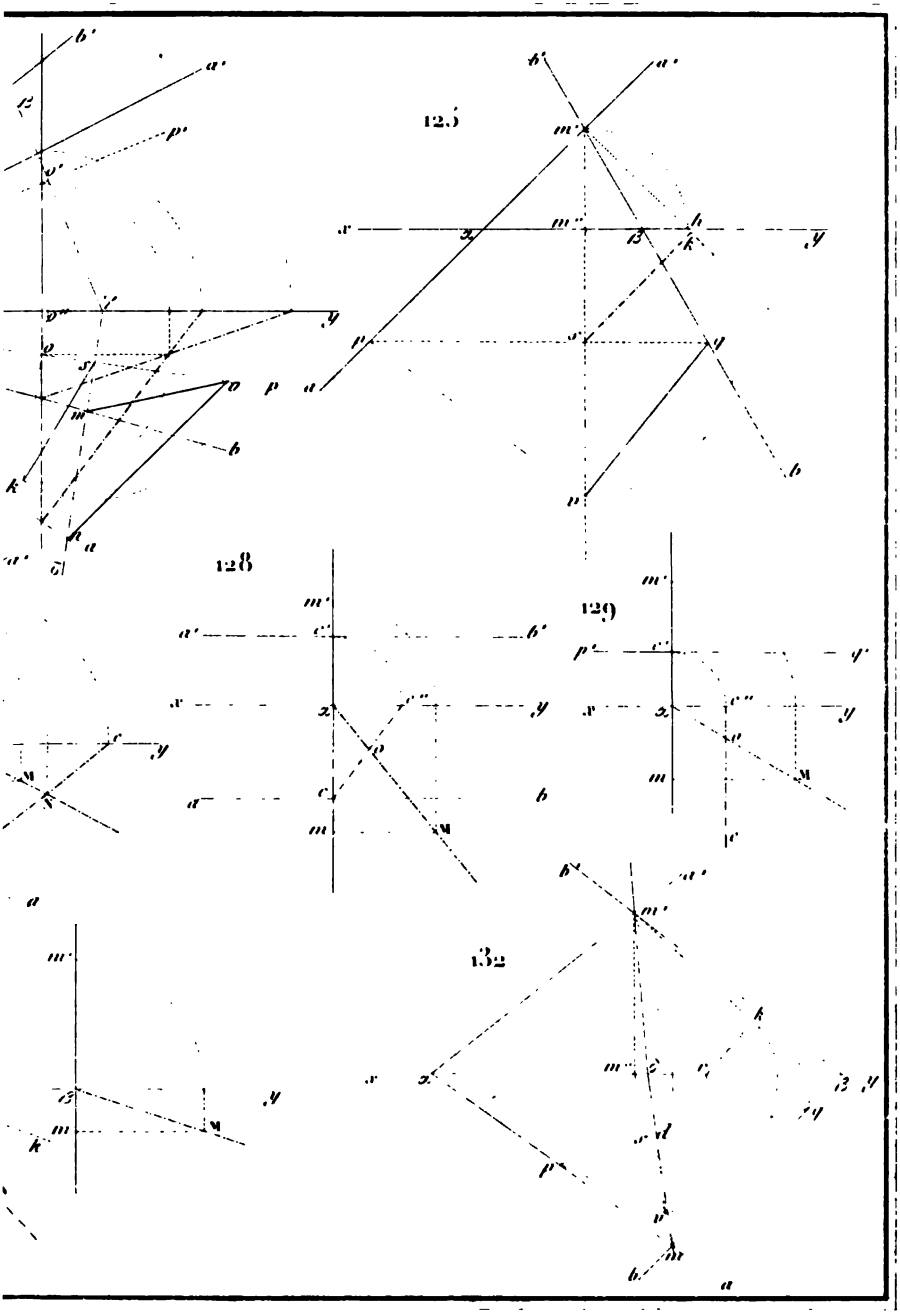


122



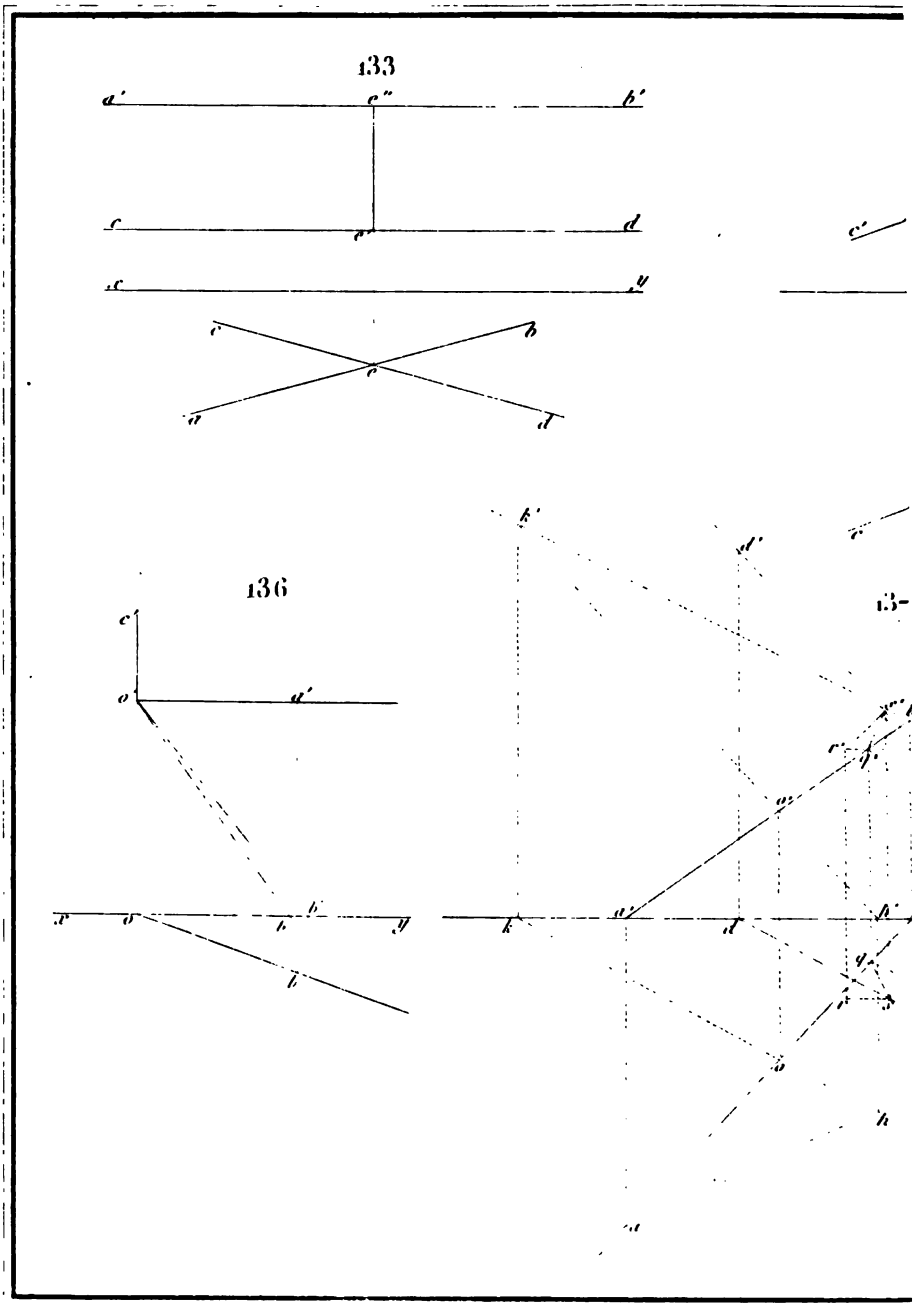


De Lafremoire del



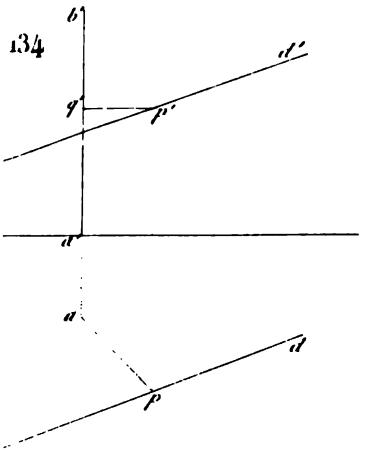
Ribon sc

UNIV

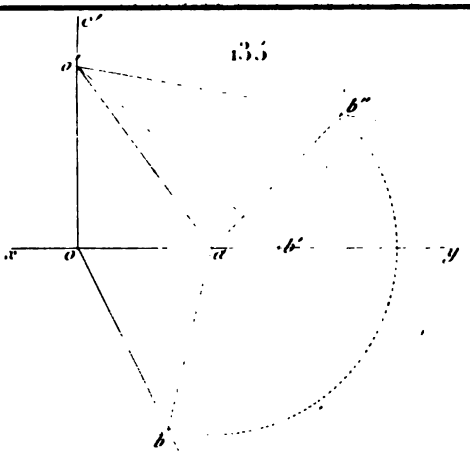


De Lafirmoure del

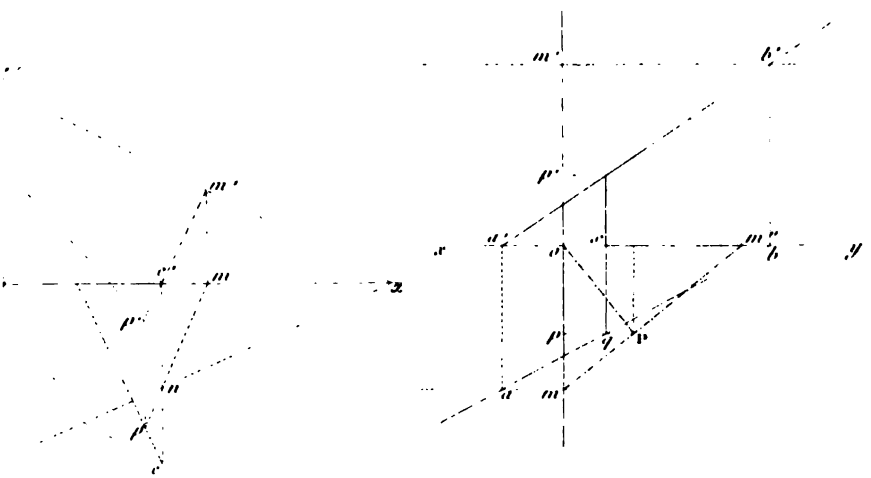
134



135

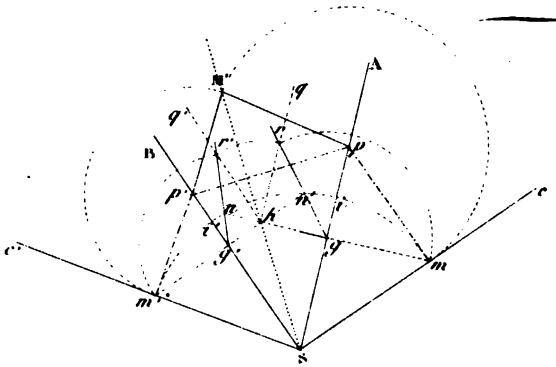


138

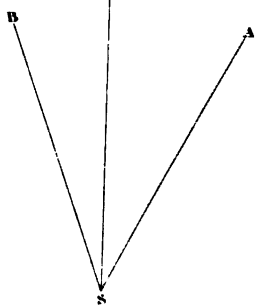


Ilhon sc

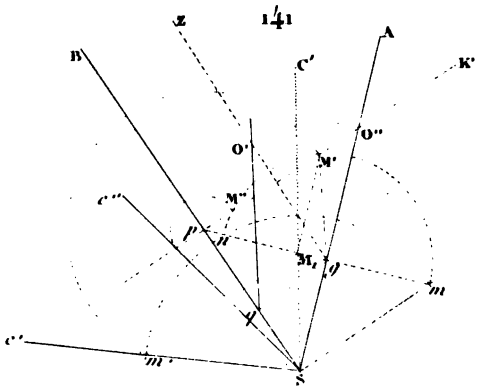
UNIV. OF



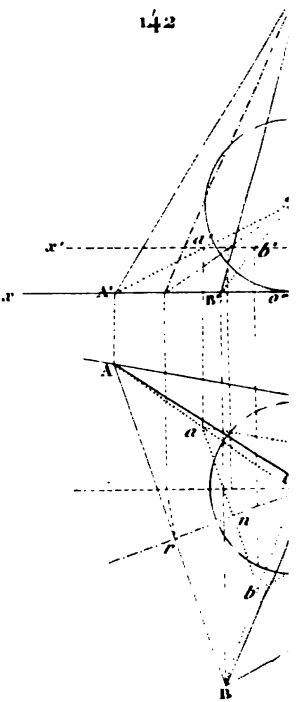
139



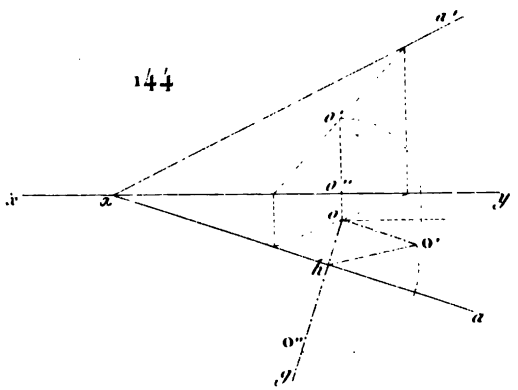
141



142

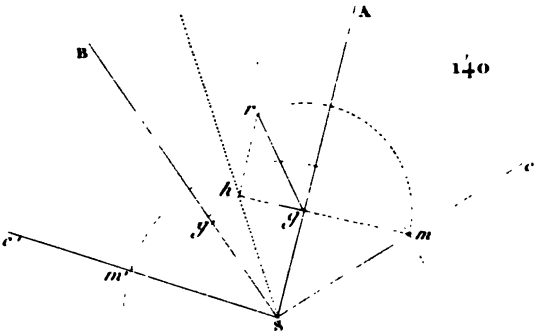


144

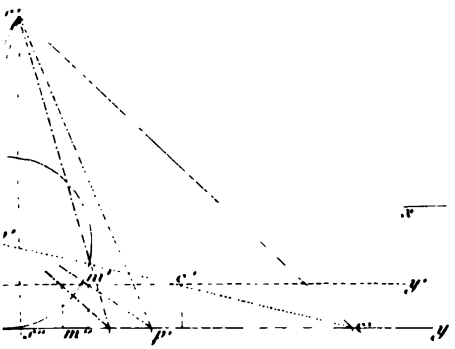


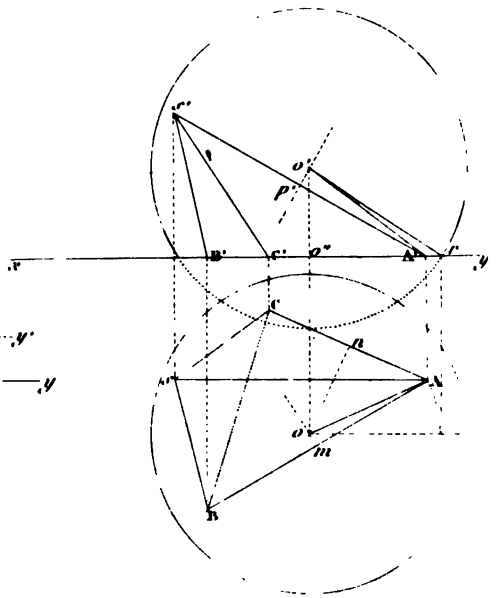
De Lafrénoye del.

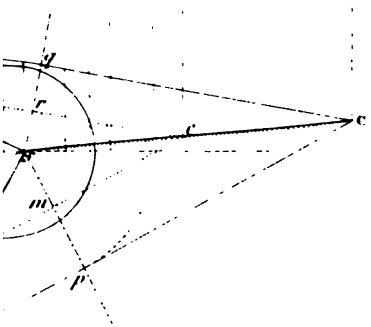
140


A
B
r
h
y
y'
m
c
c'
m'
s

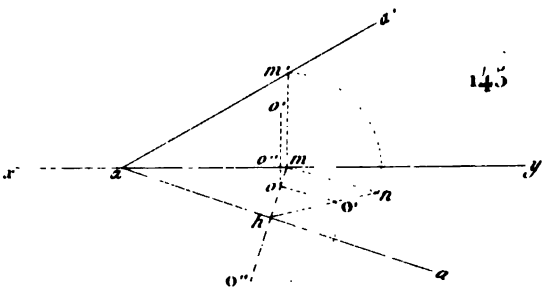
143

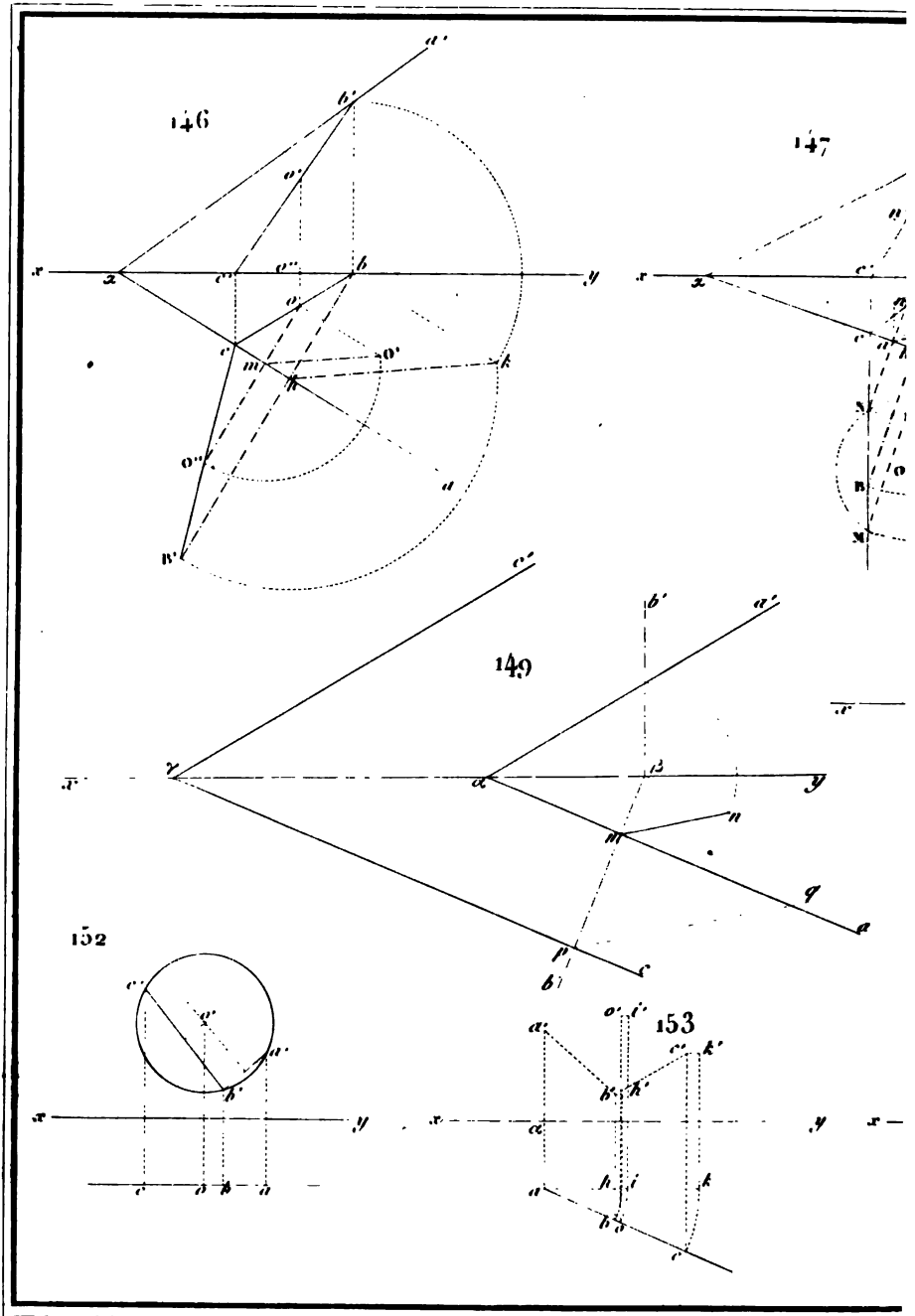

m'
c'
y'
m''
p'
y


c'
o
p
B'
c'
o''
A'
r
y
c
n
A
o'
m
B

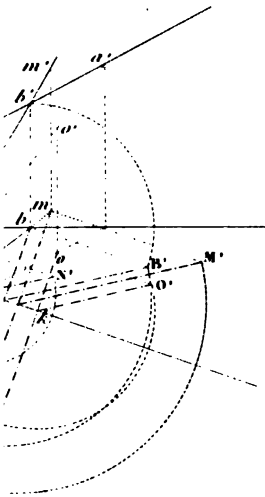

q
r
c
C
m
p

145

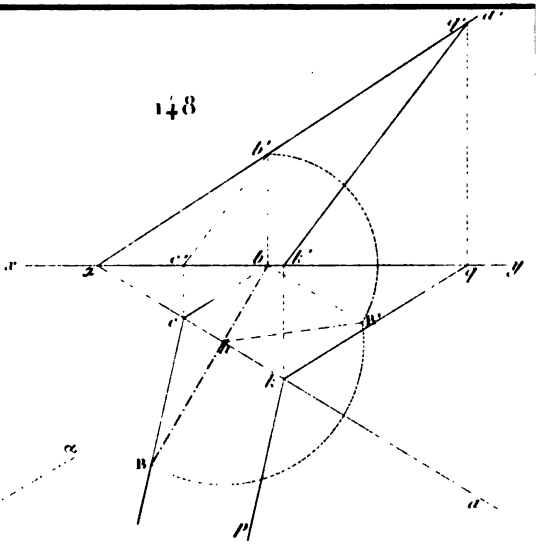

a'
m'
o
x
o''
m
y
o'
n
o
h
o''
a

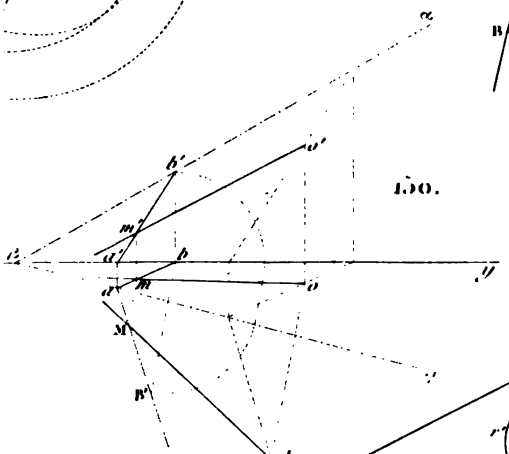


De Latiremoire del



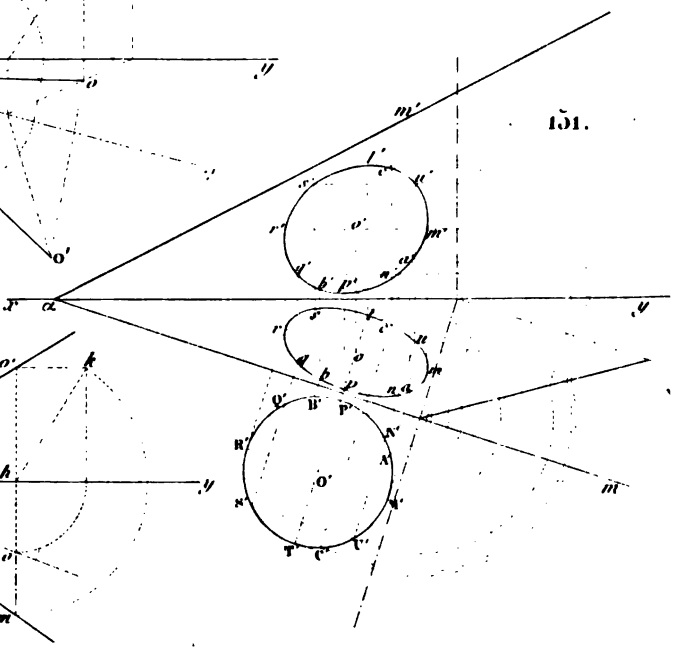
148



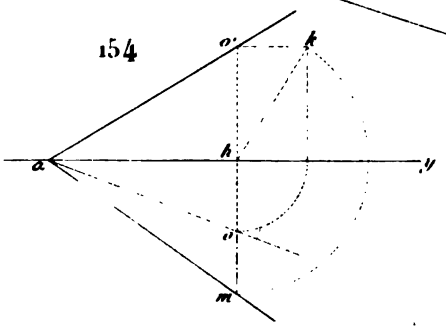


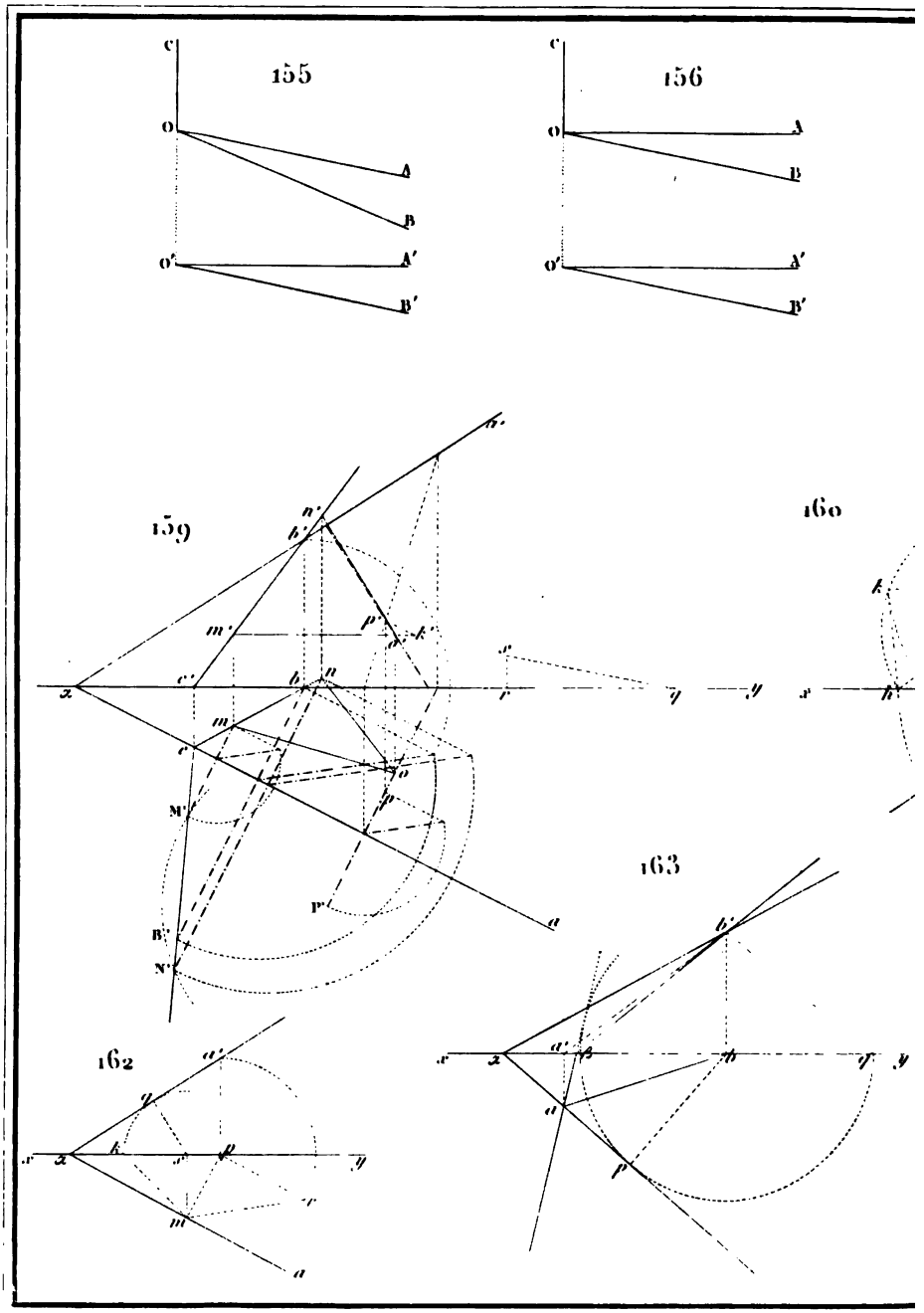
150.

151.



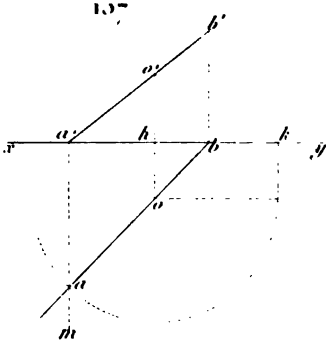
154



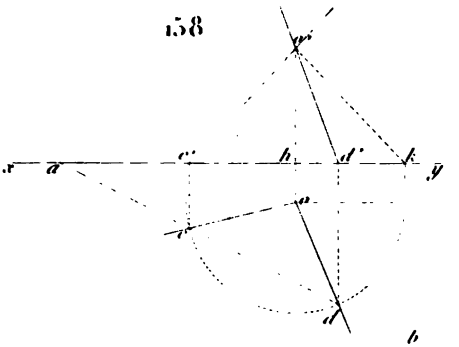


De Lafrémoire del

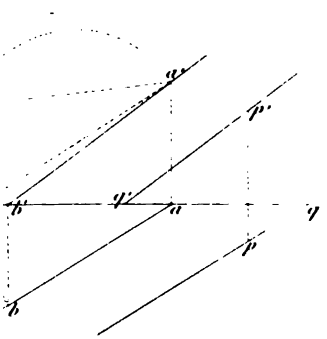
157

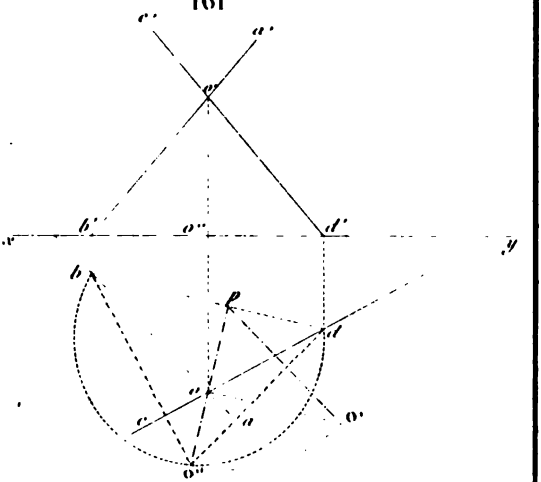


158

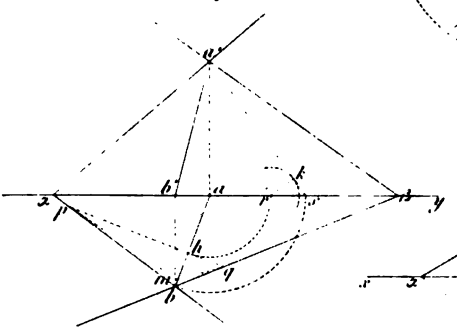


161

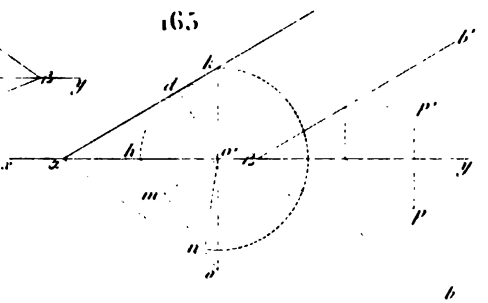




164

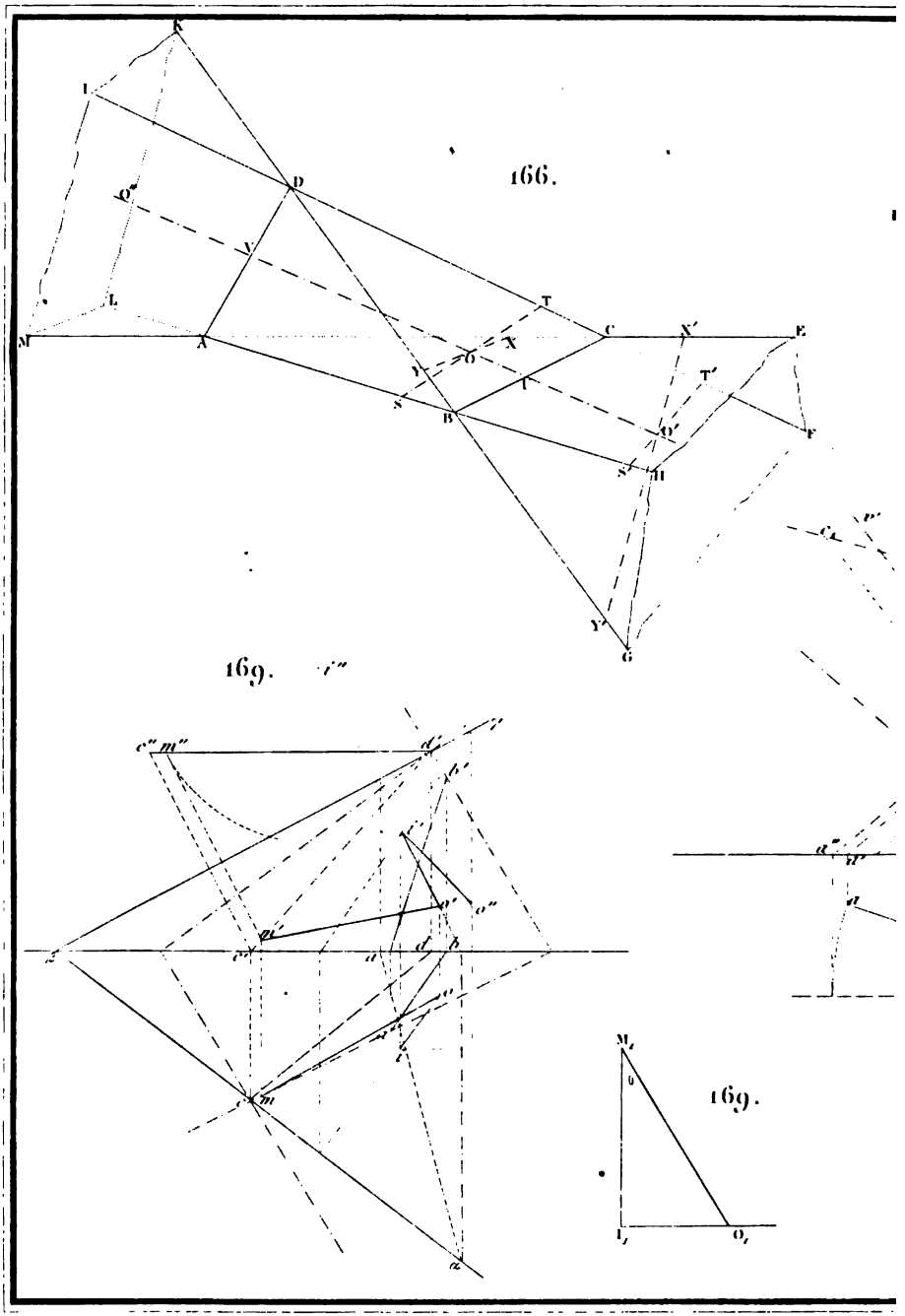


165



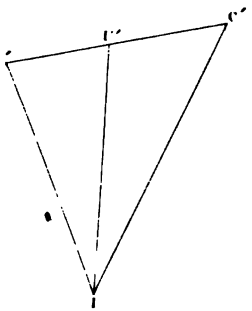
Hibon sc

UNIV. OF

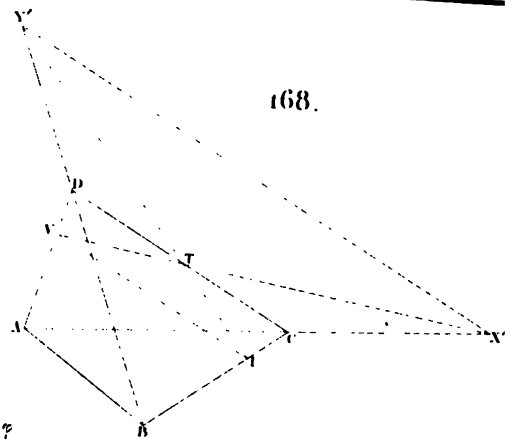


De Lafrémoire del.

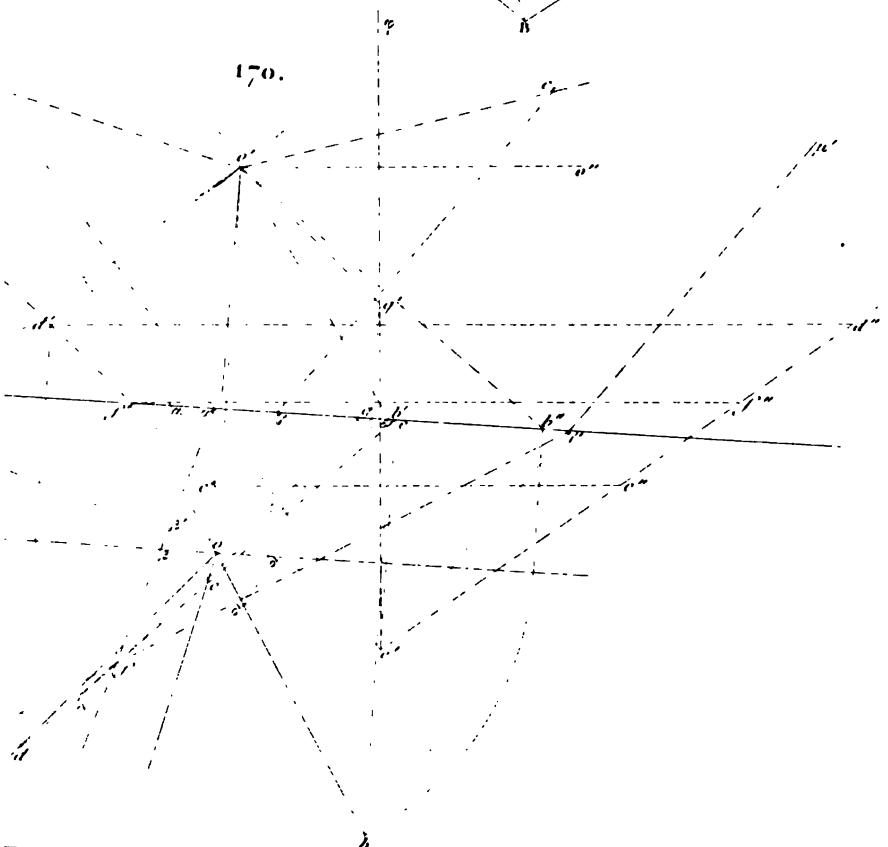
167.



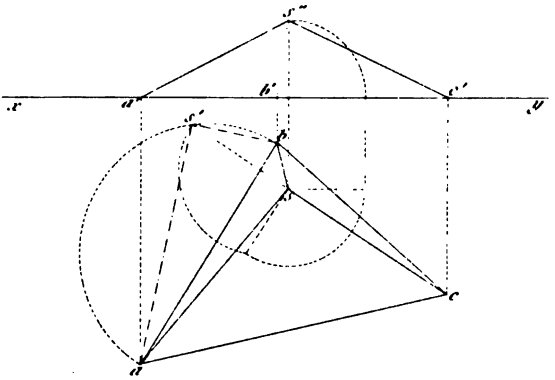
168.



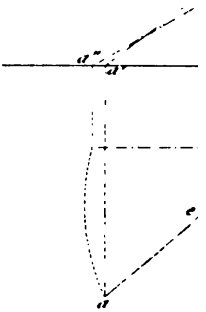
170.



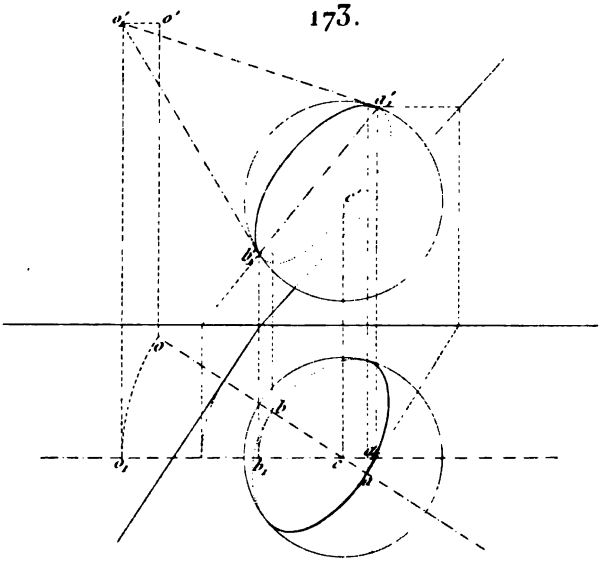
171.

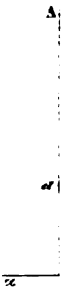


17



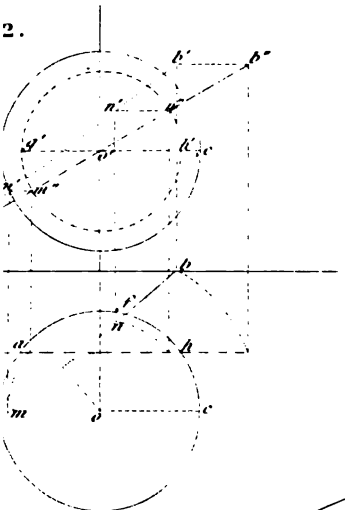
173.



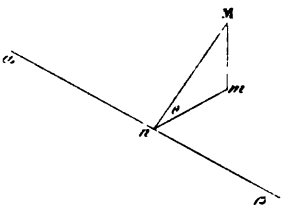


De Lafremaire del.

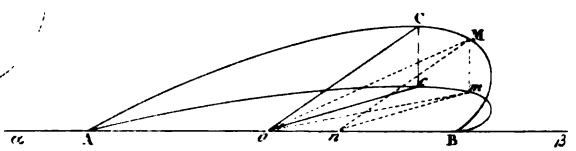
2.



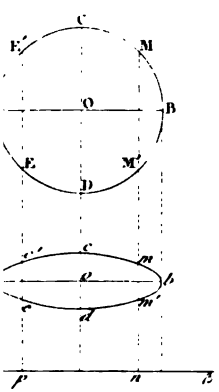
174.



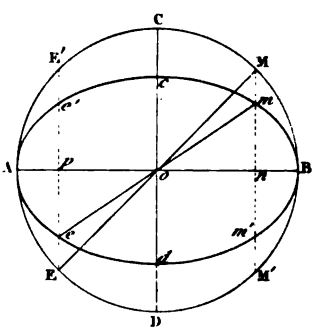
177.



175.



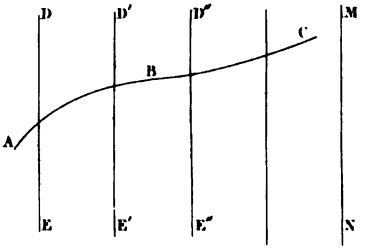
176.



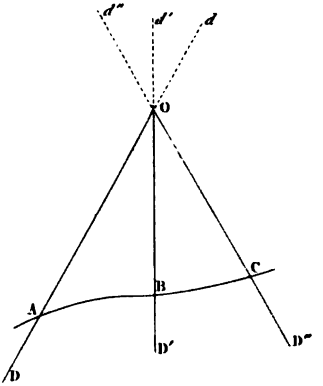
Lemaitre sc.

UNIV. OF

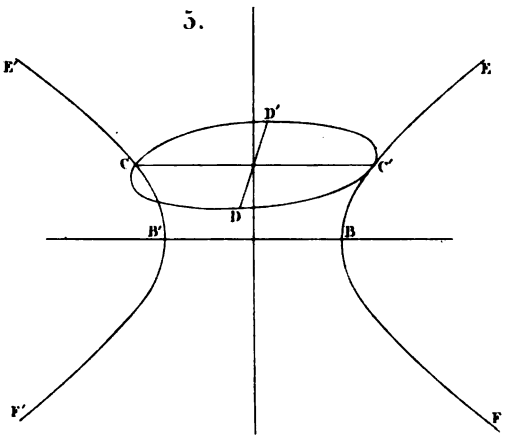
Fig. 1.

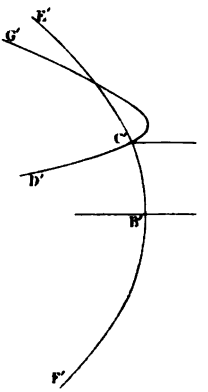


2.

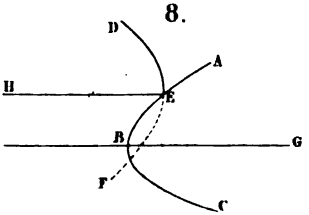


3.

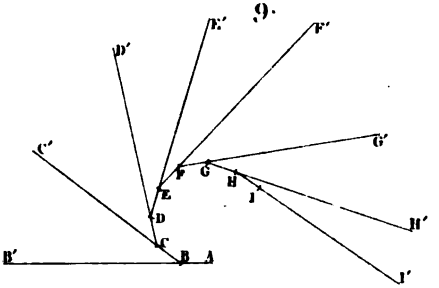




8.

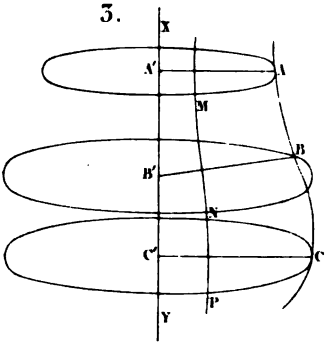


9.

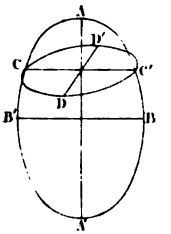


Catalan del.

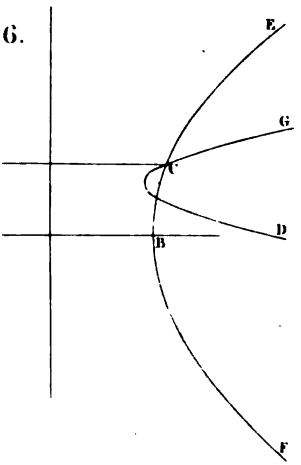
3.



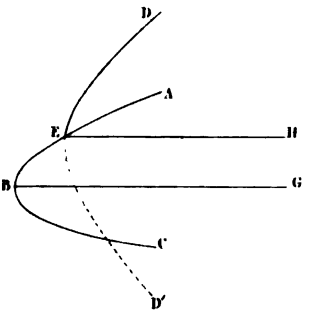
4.



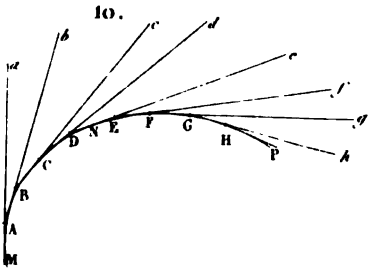
6.



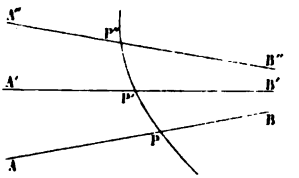
7.



10.



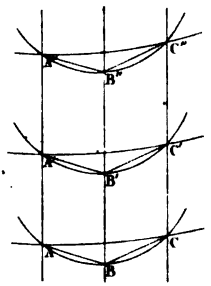
11.



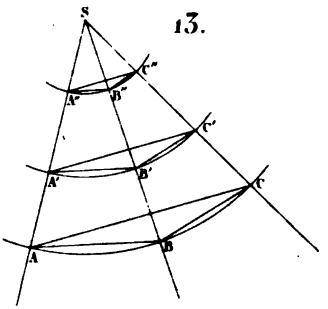
Lemaitre sc

UNIV. OF MICH.

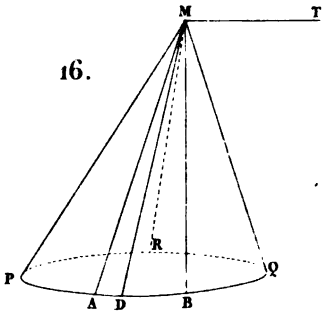
12.



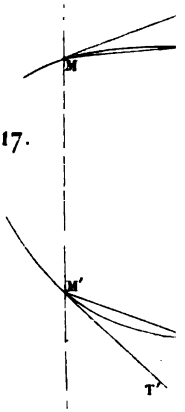
13.



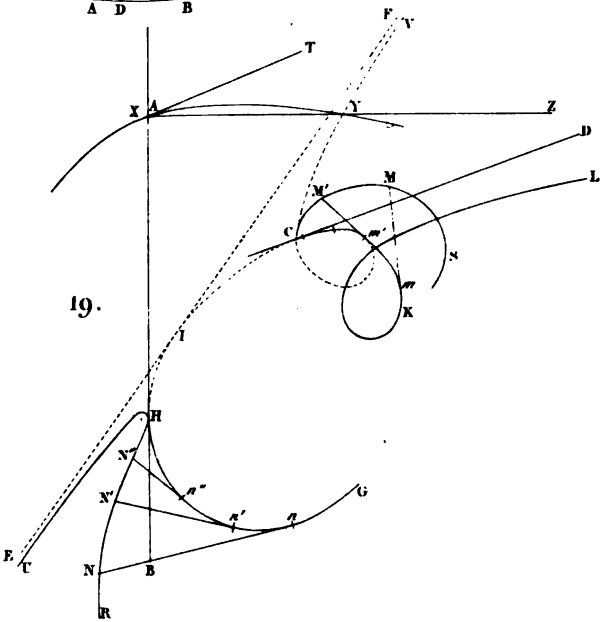
16.



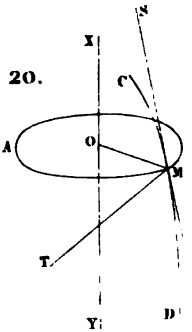
17.



19.

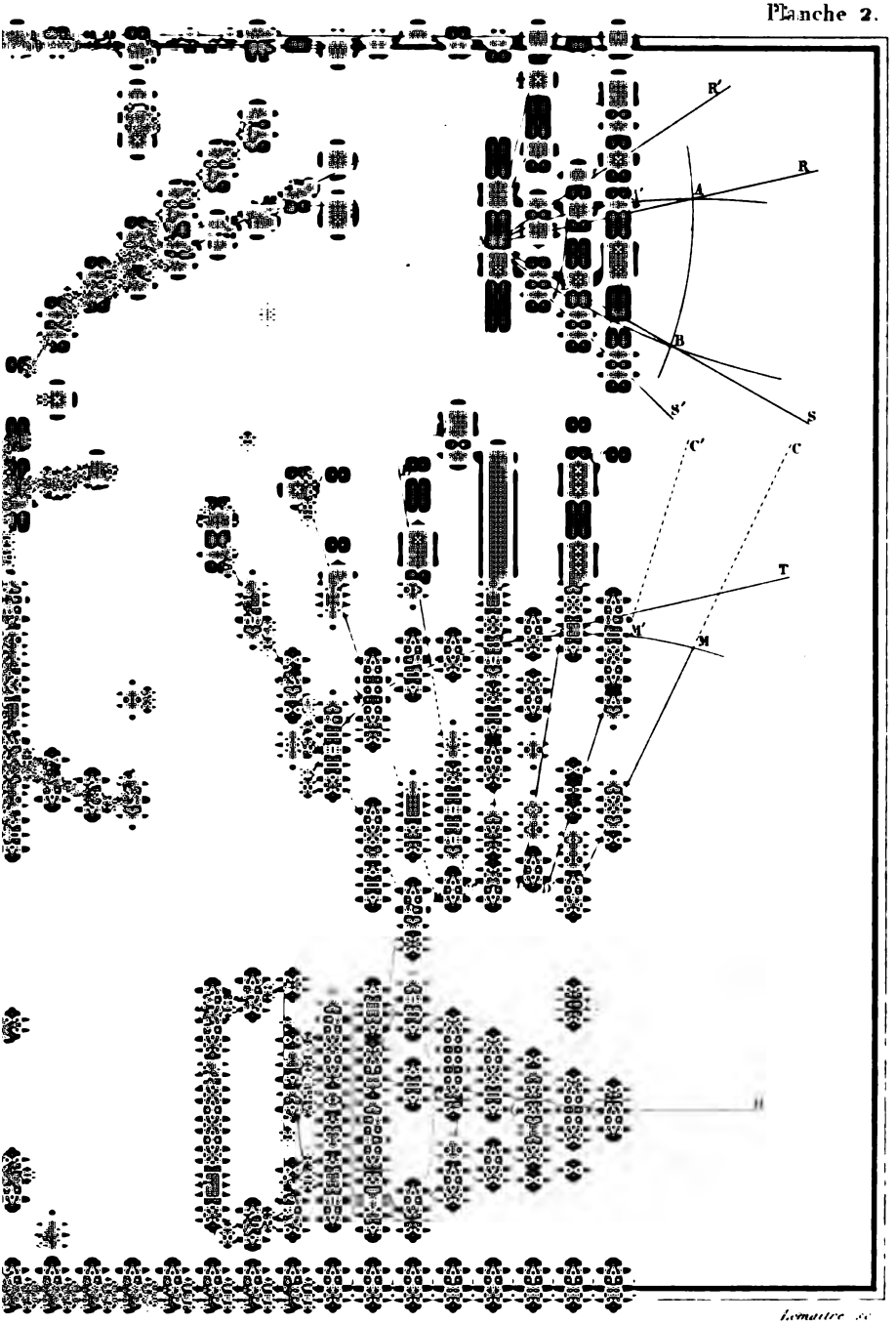


20.



talan del.

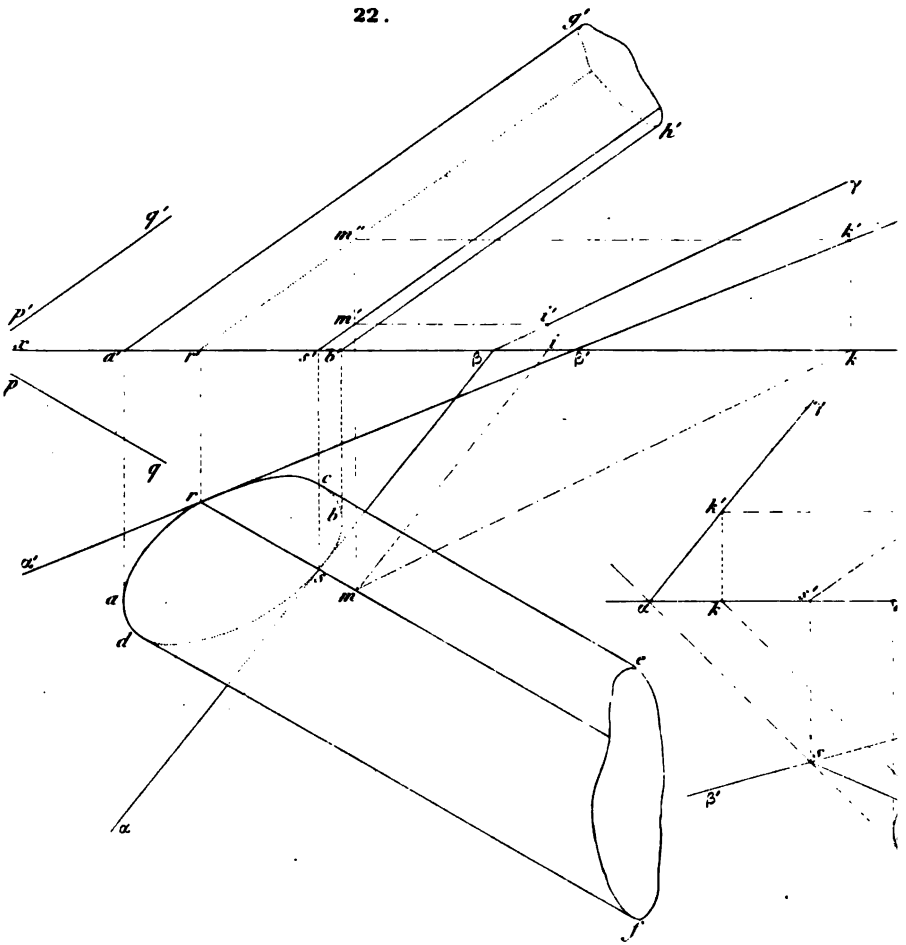
Planche 2.

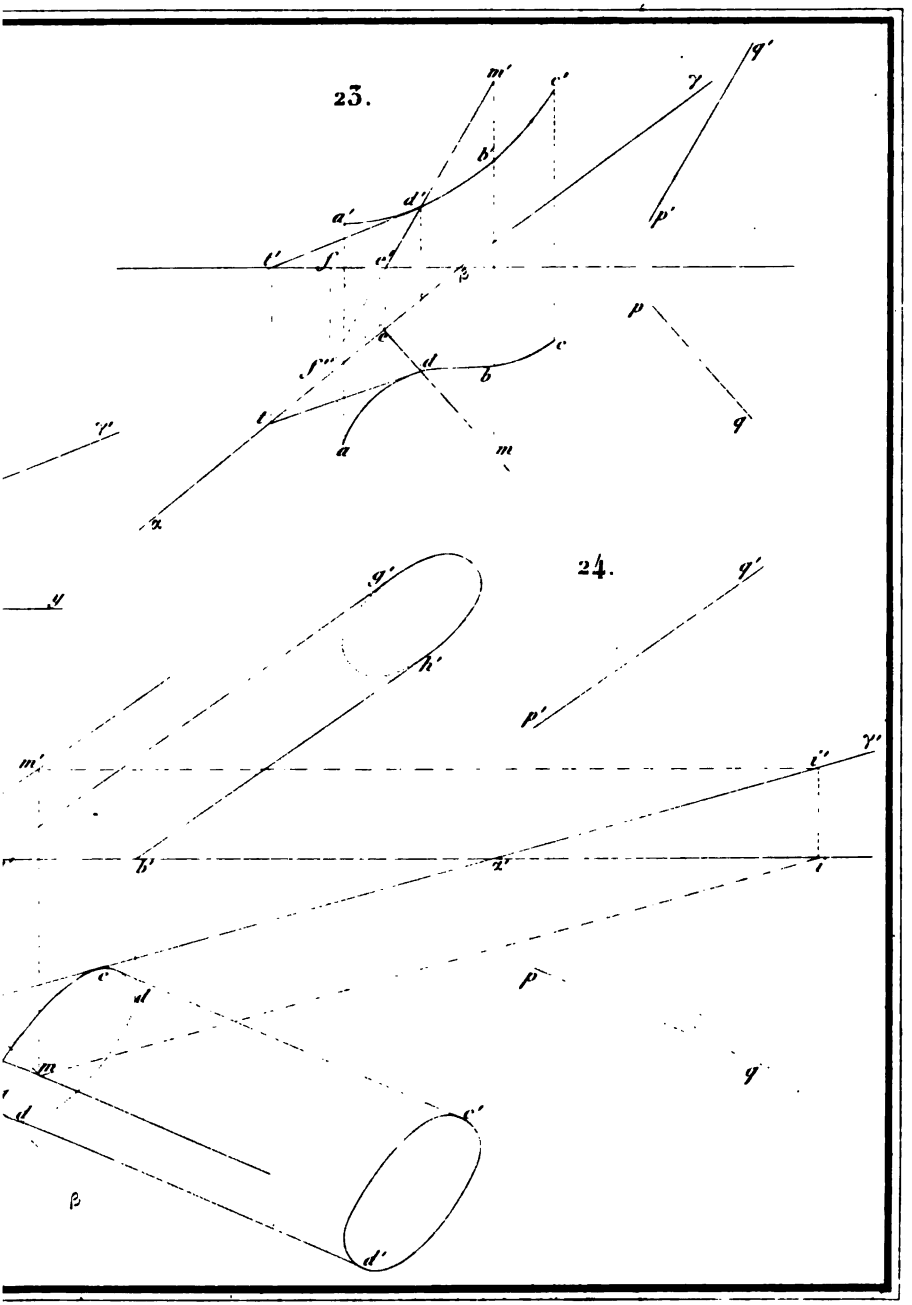


Lemaître sc.

UNIV. OF MICH.

22.

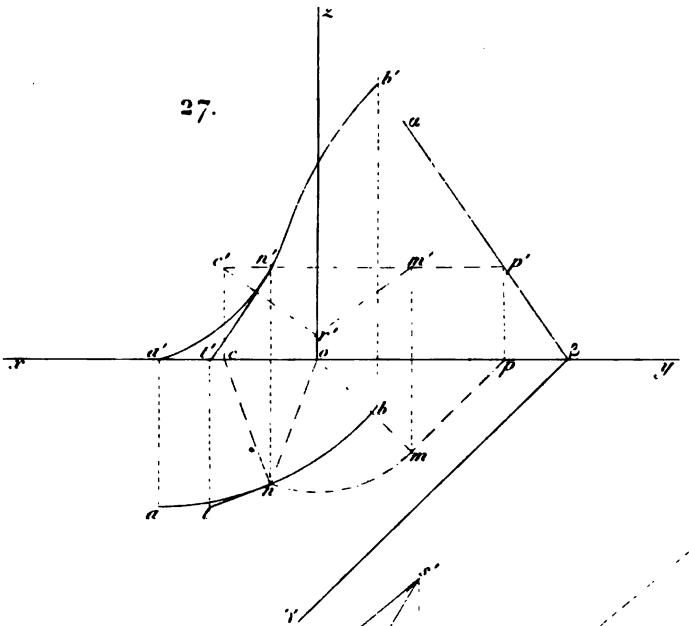




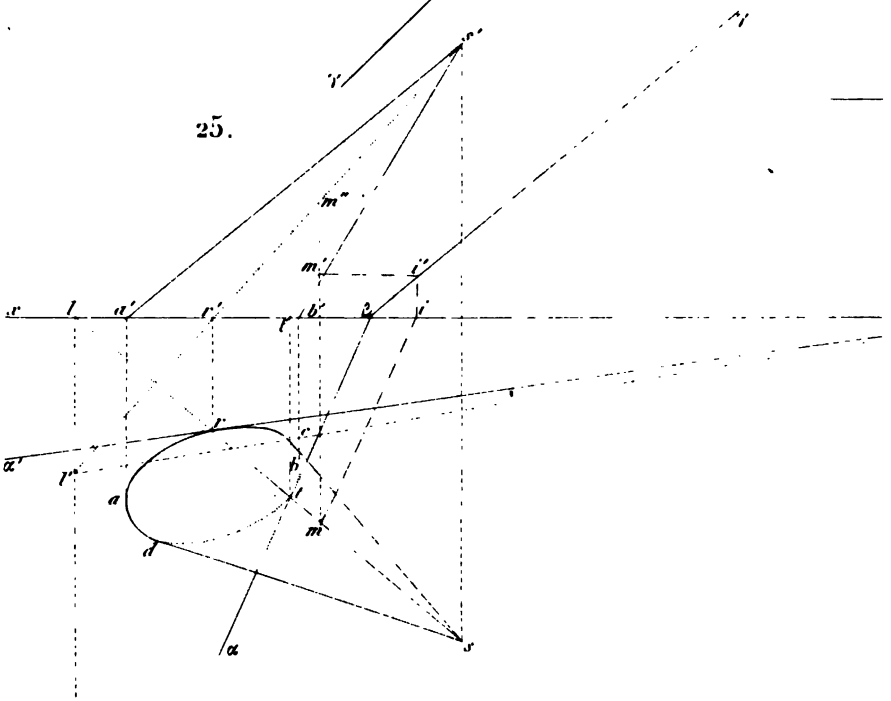
Lemaitre sc.

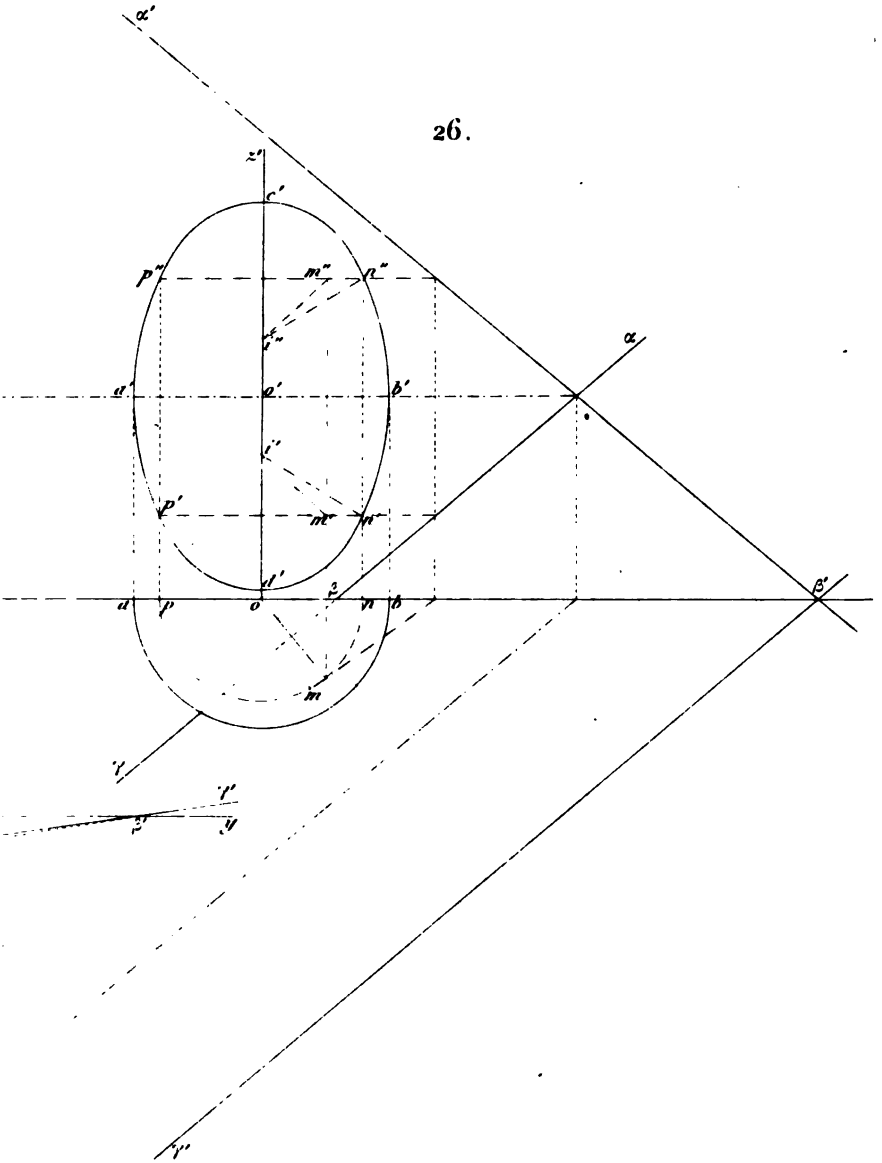
UNIV. OF MICH.

27.



25.



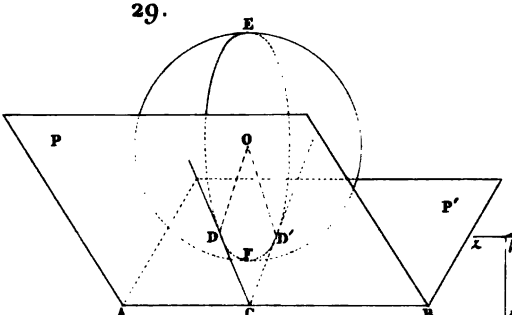


Lemaitre sc.

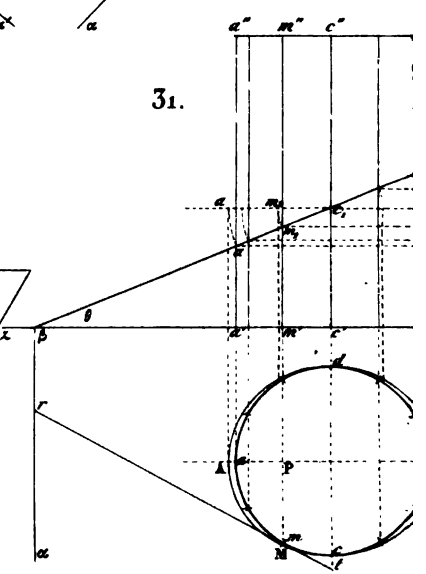
UN
OF
MIC

28.

29.



31.

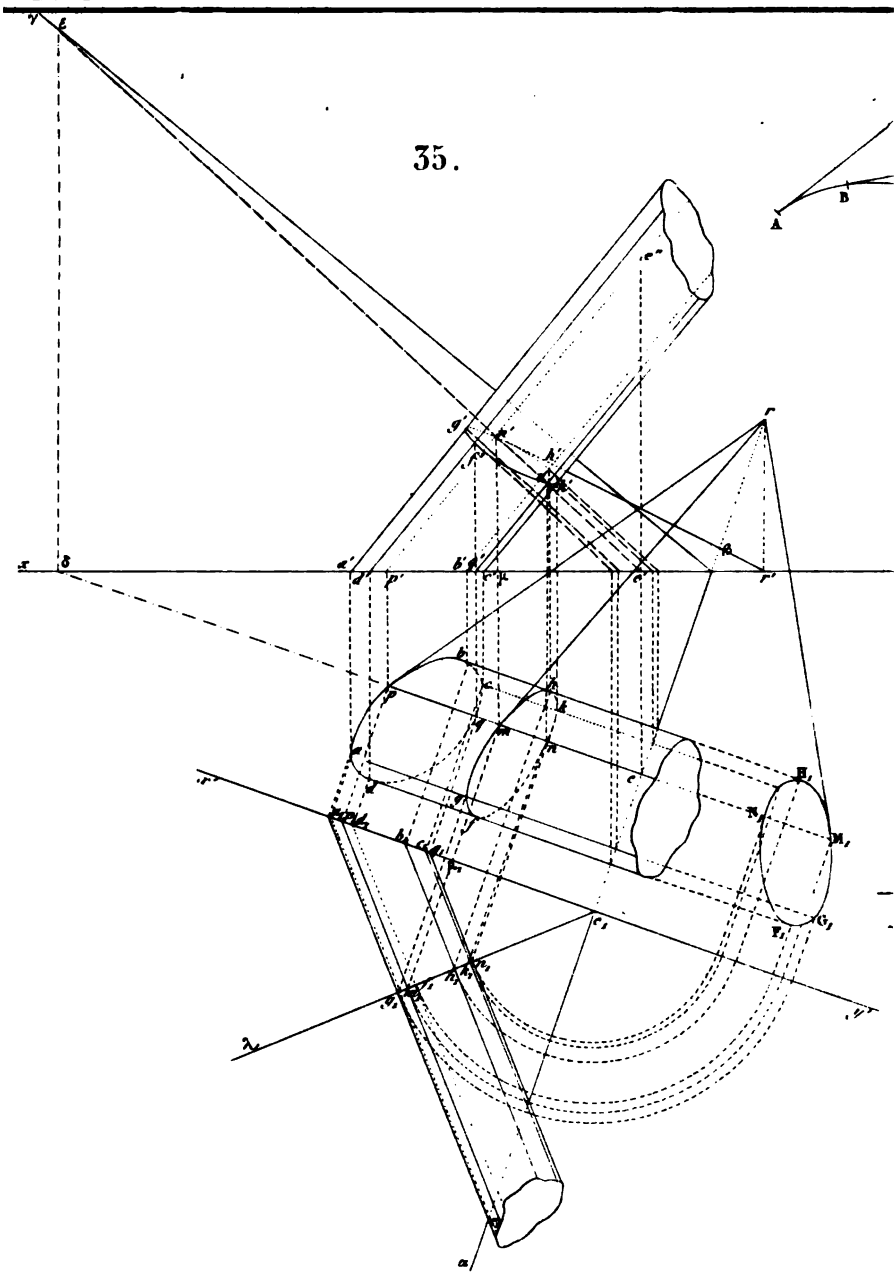


Catalan del.

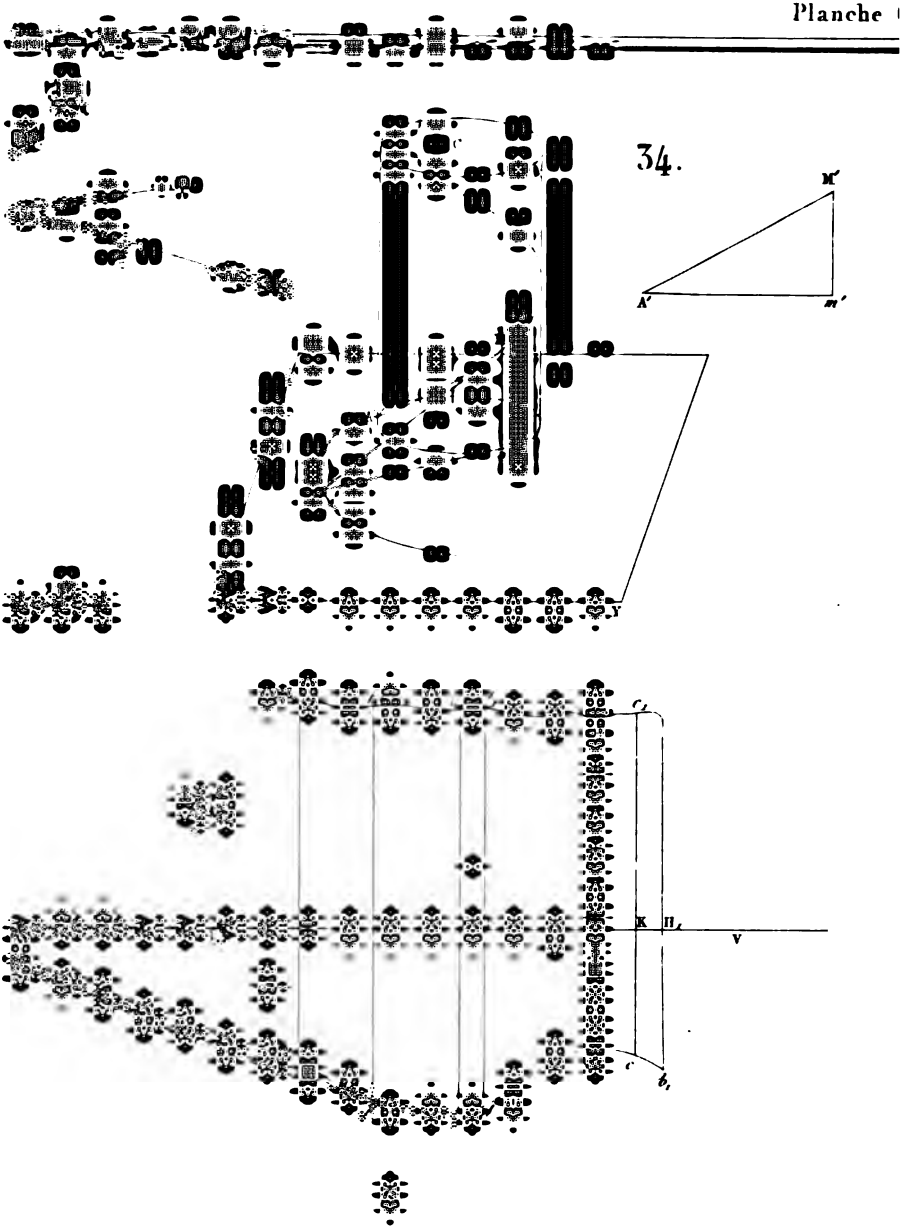
30.

32.

Lemaitre sc

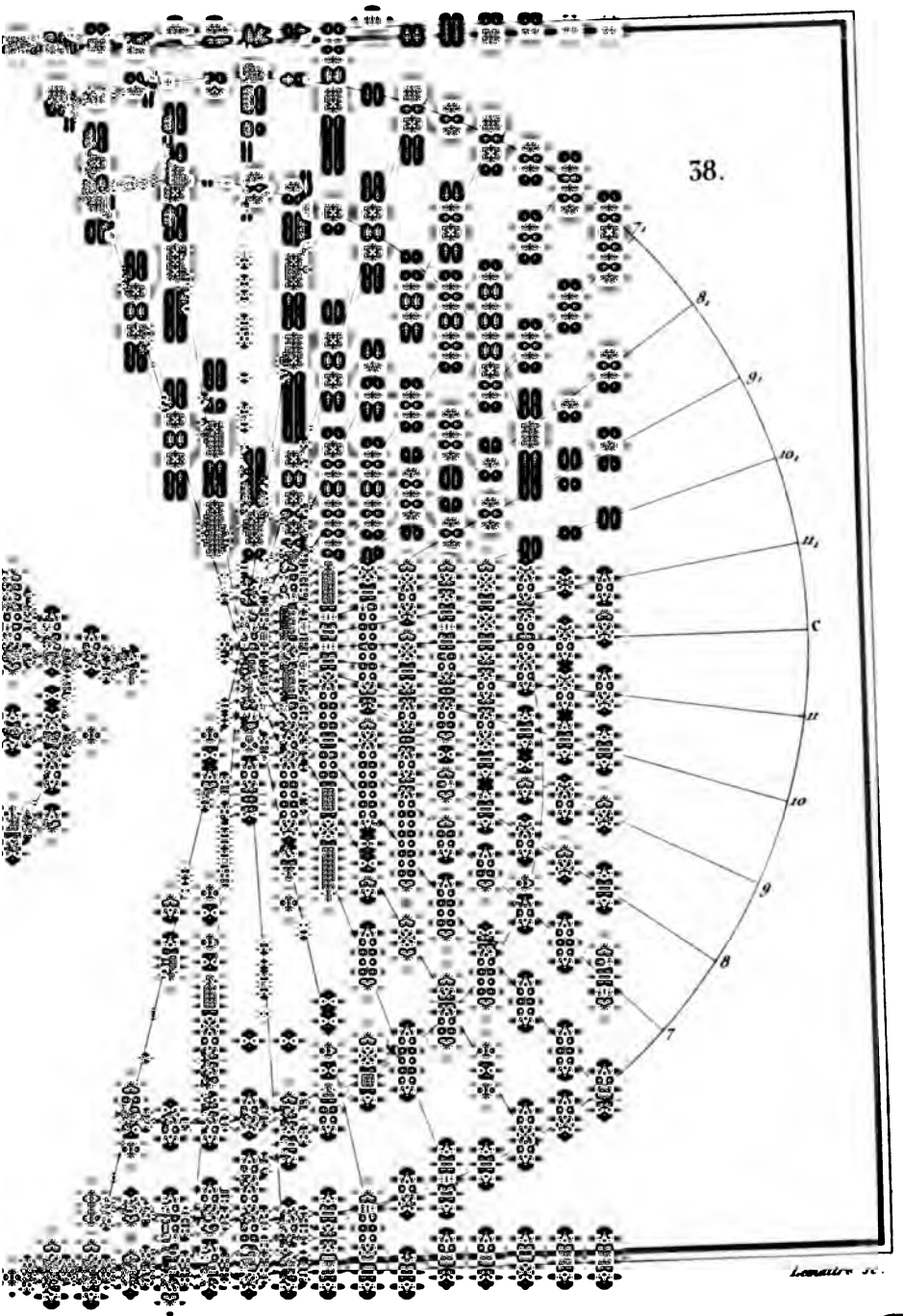

35.
A
B

34.



s''
γ
i''
h'
l''
s
i
l
h
g
8
7
b

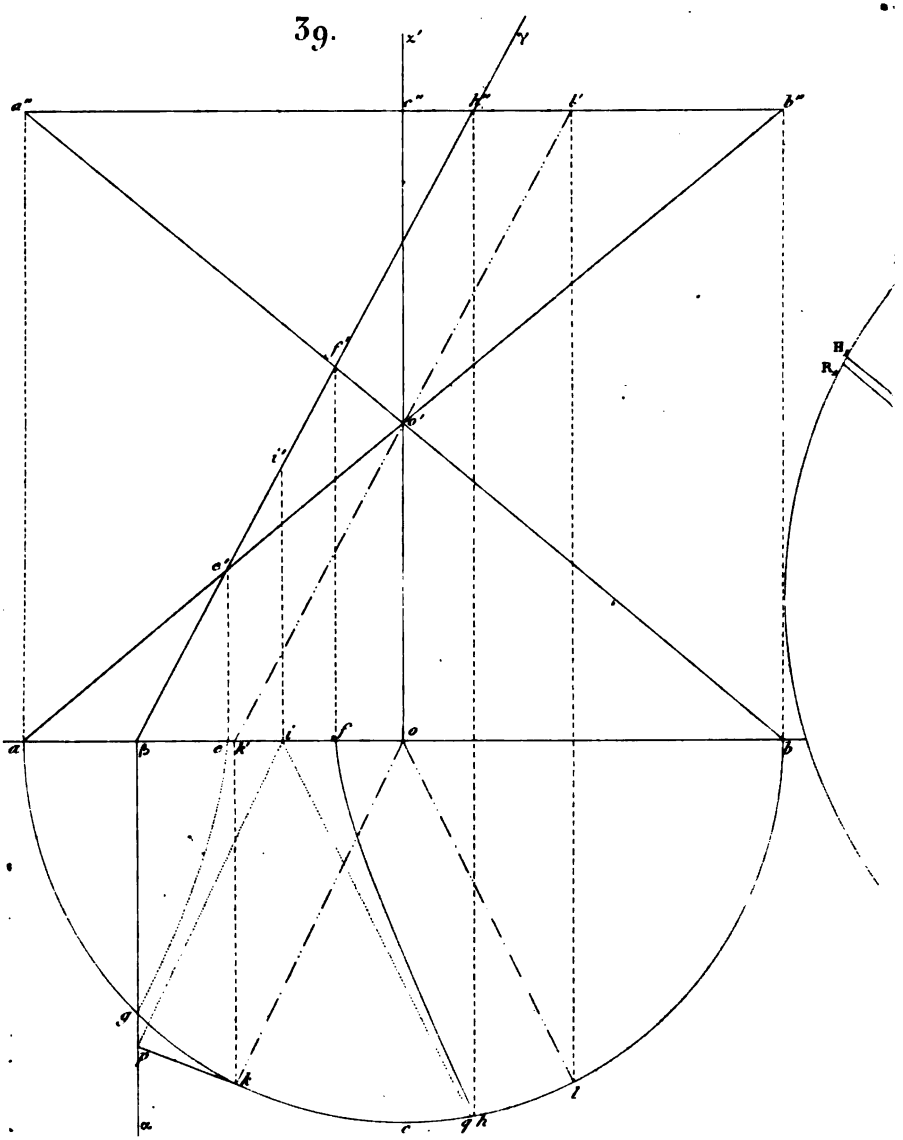
Planche 7.



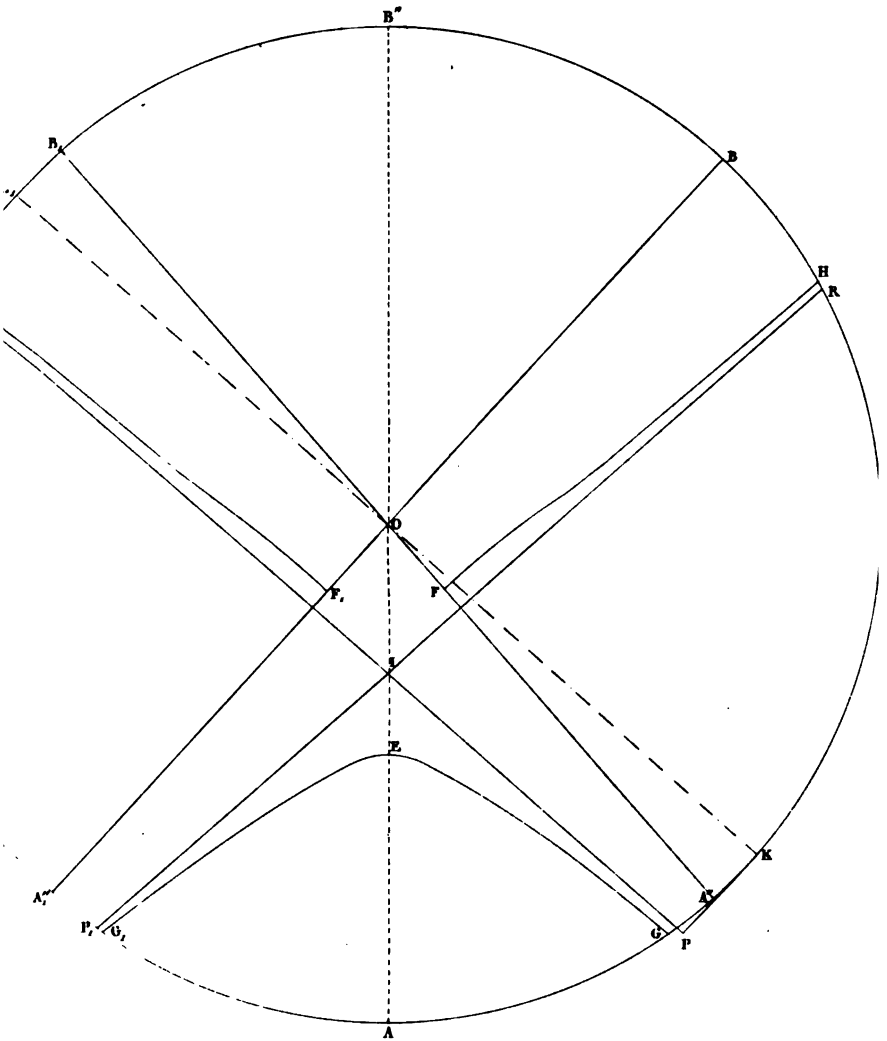
Lemaitre sc.

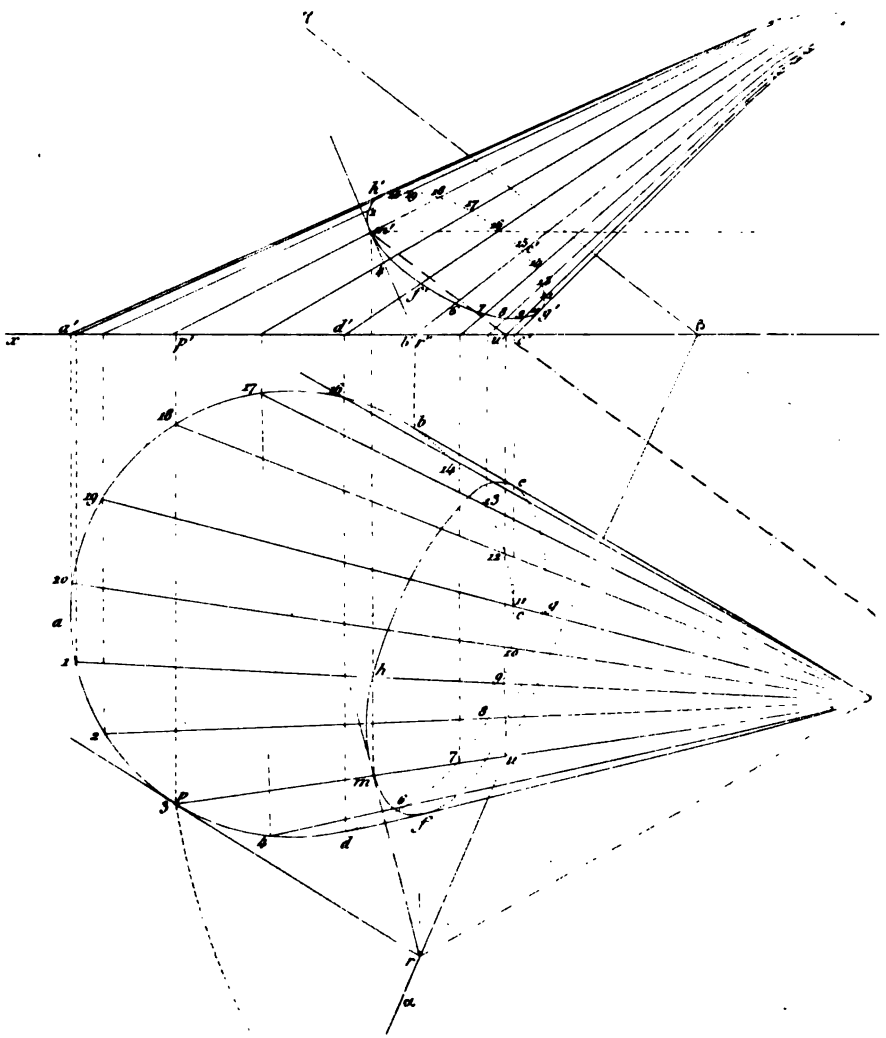
UNIV. OF MICH.

39.

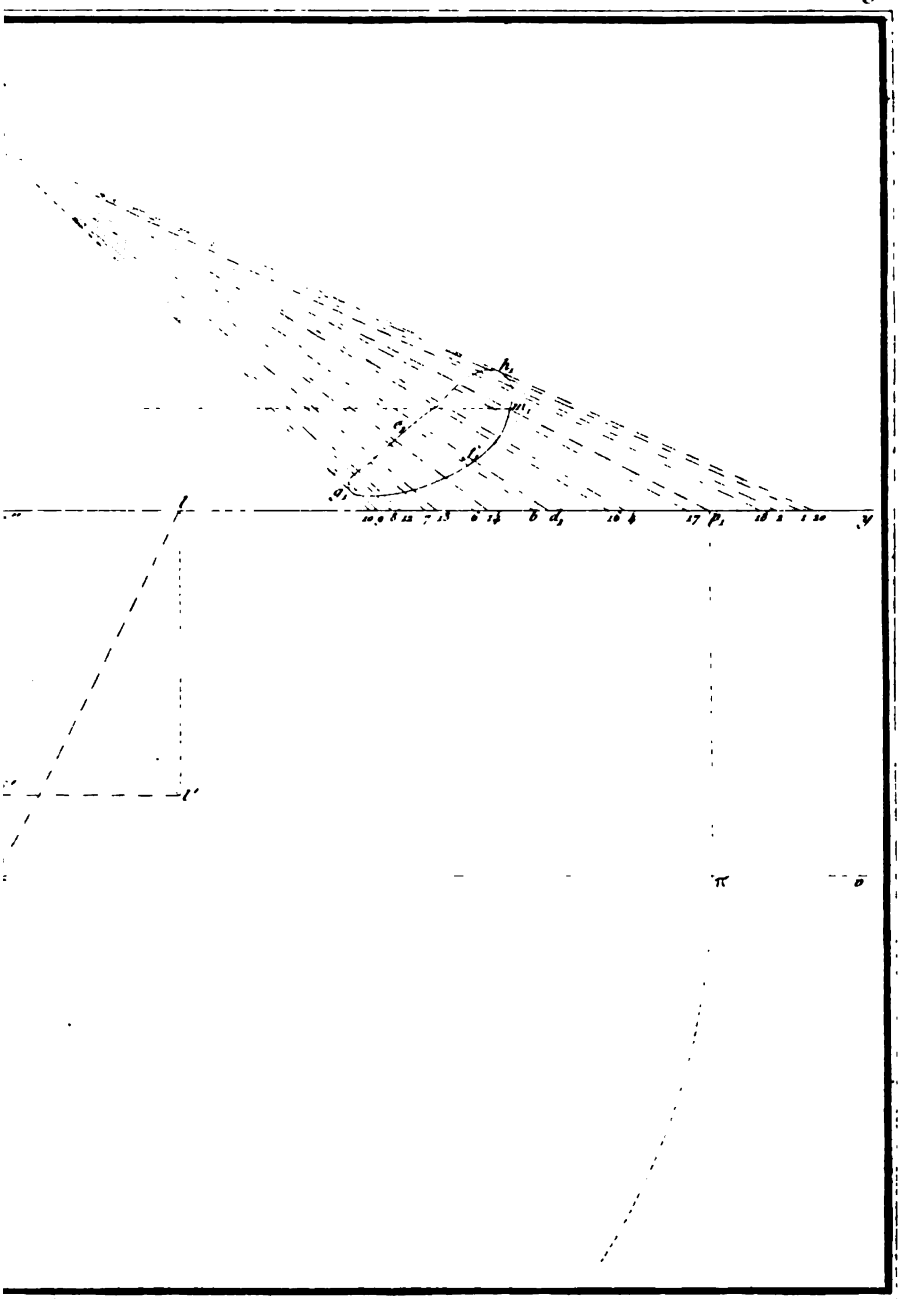


40.



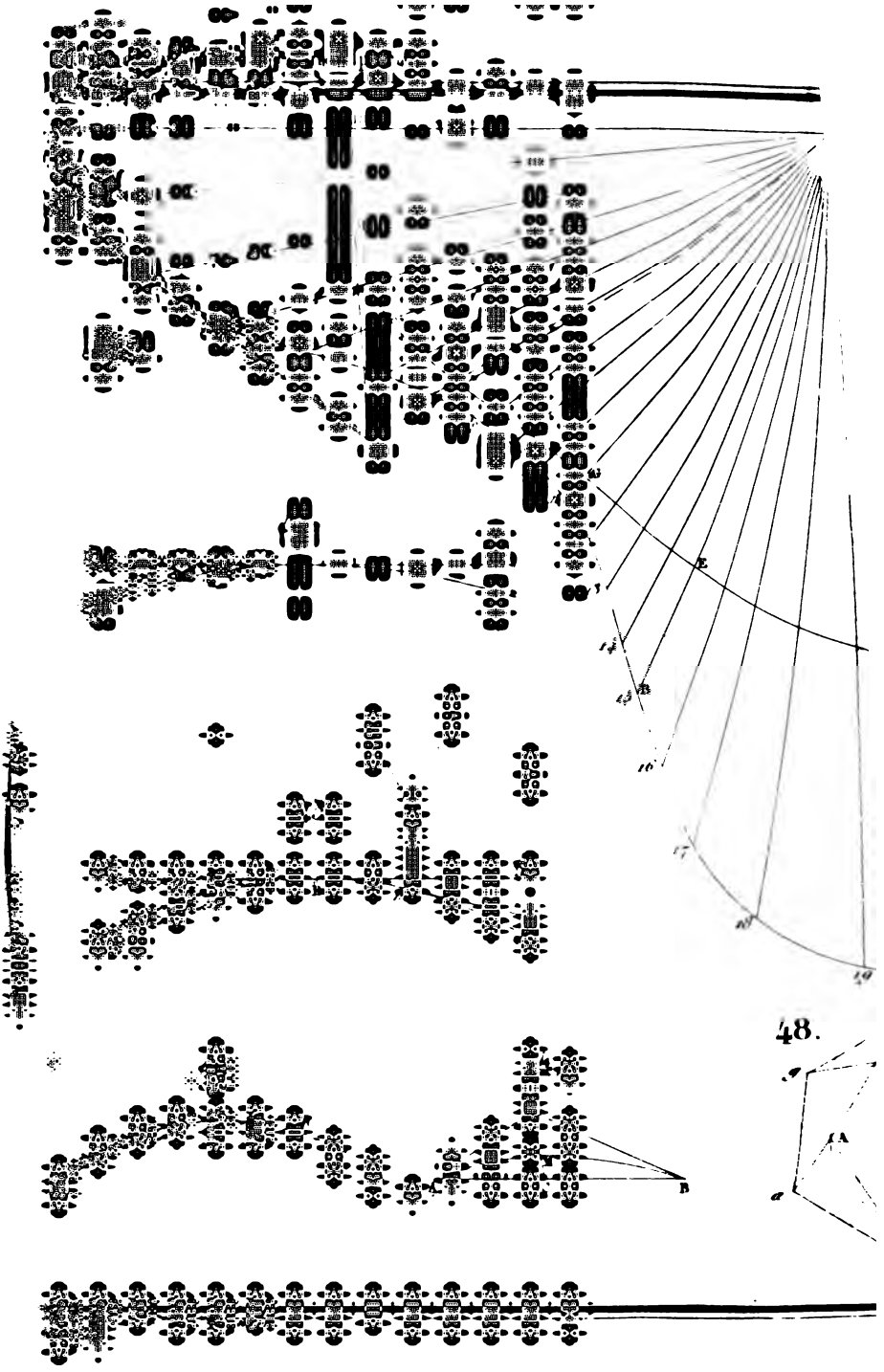


dsen del.



Lemaitre sc

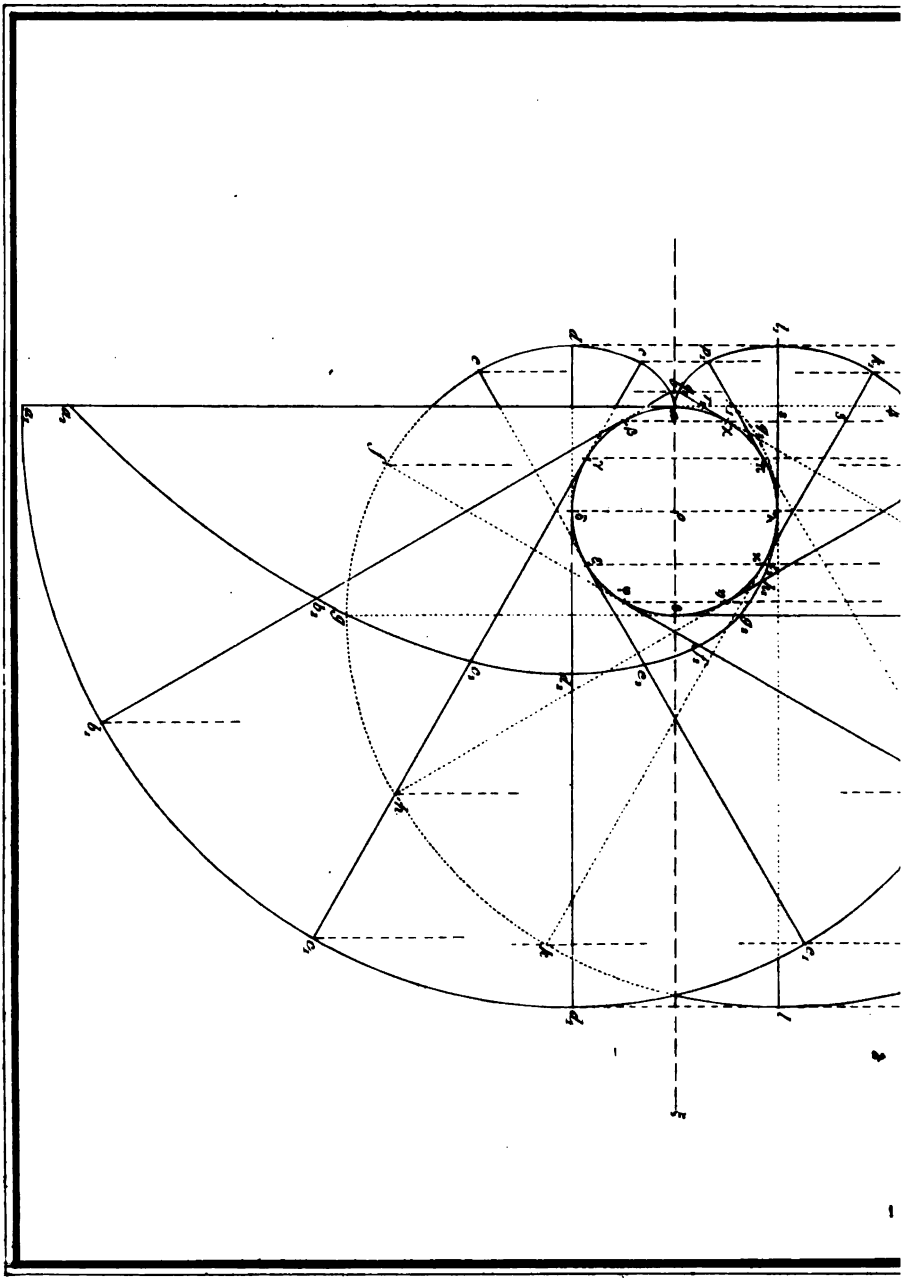
UNIV. OF MICH.


48.

44.

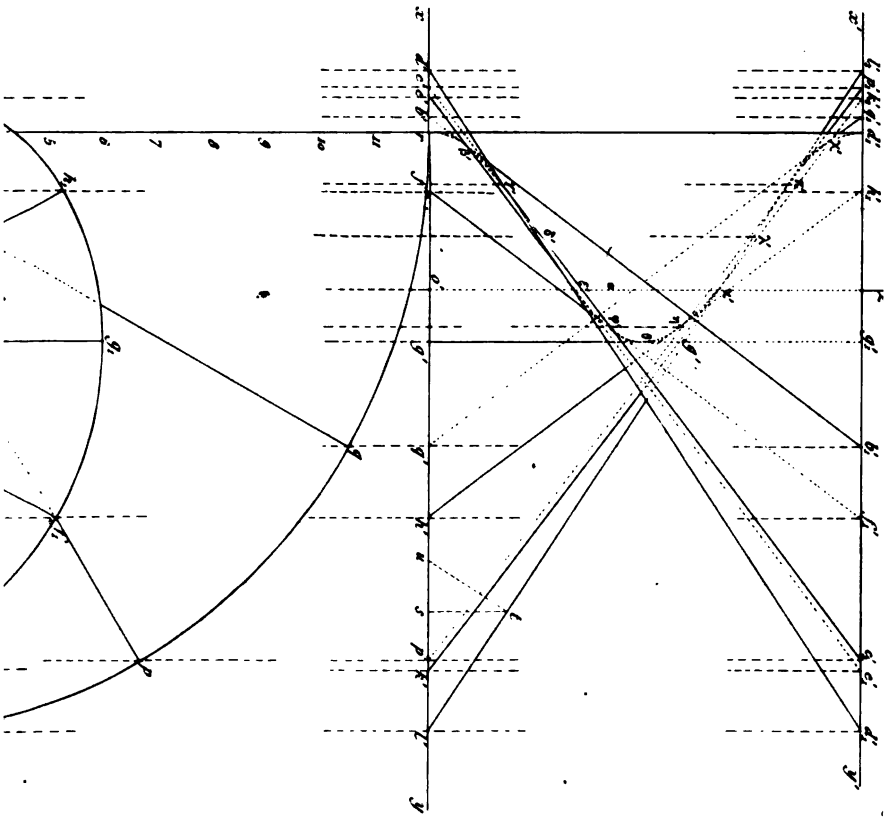
49.

50.

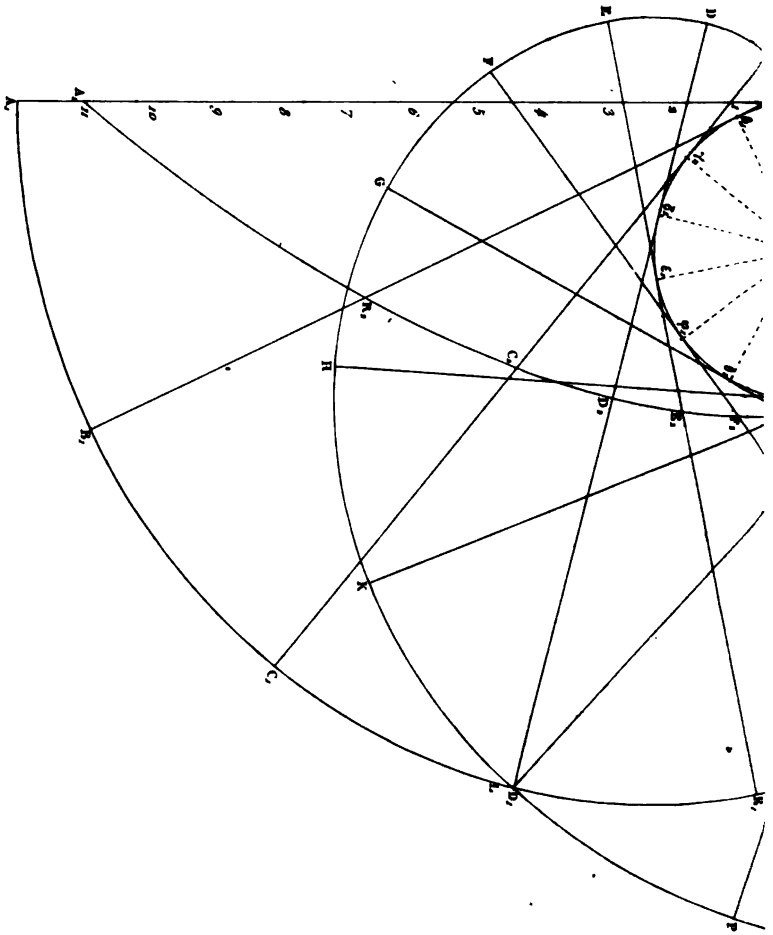


Catalan del.

51.

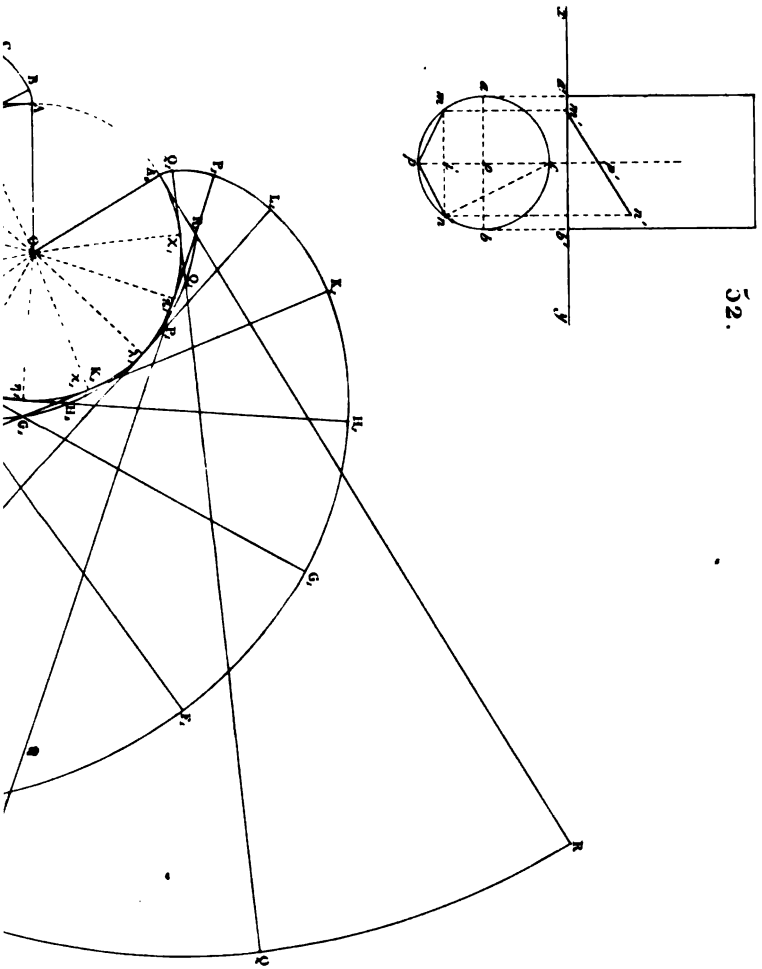


MIC



Pl. 33.

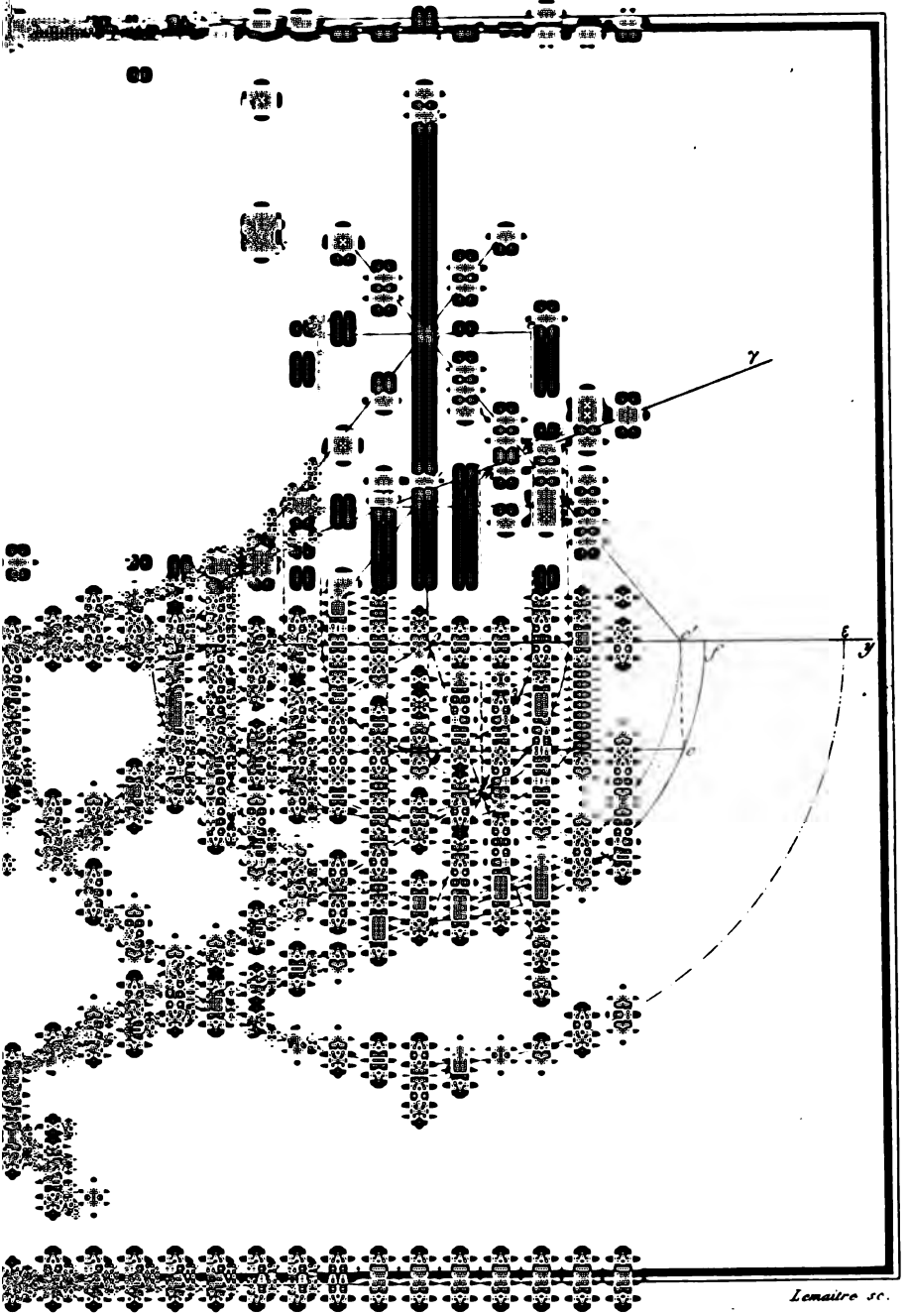
Catalan del.



52.

Lemaitre sc.

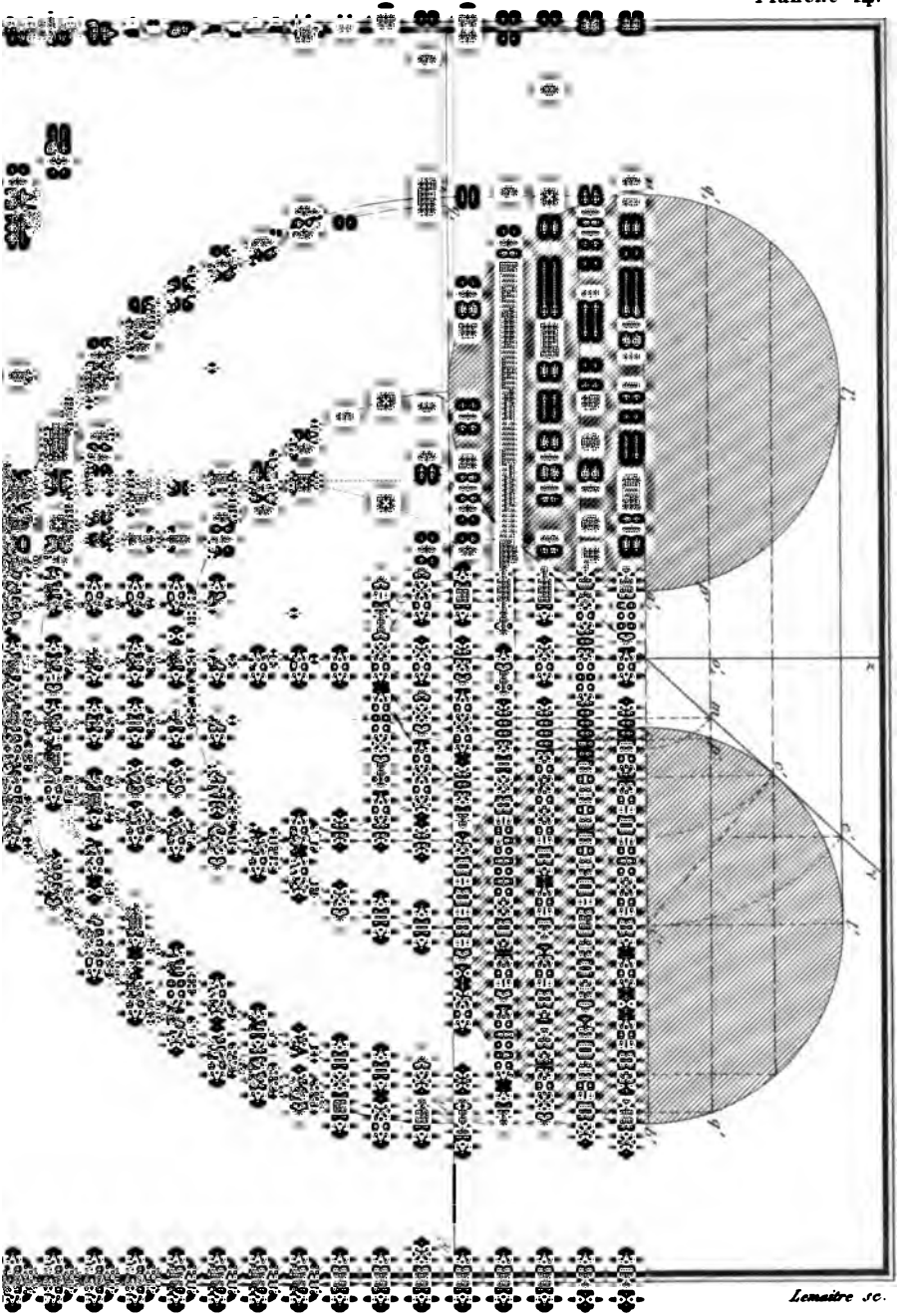
k
b
g
f
e



Lemaitre sc.

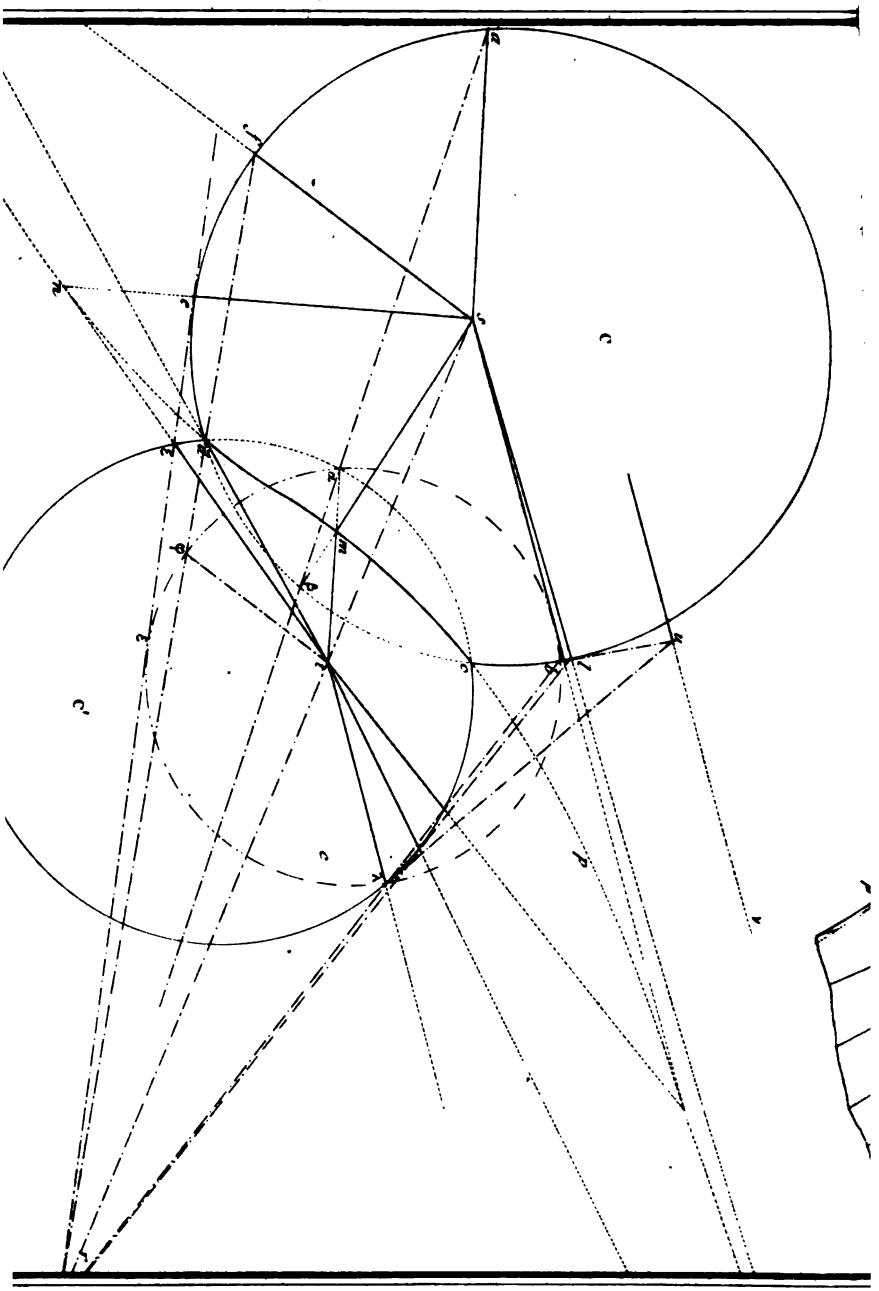
UNIV. OF MICH.

Planche 14.

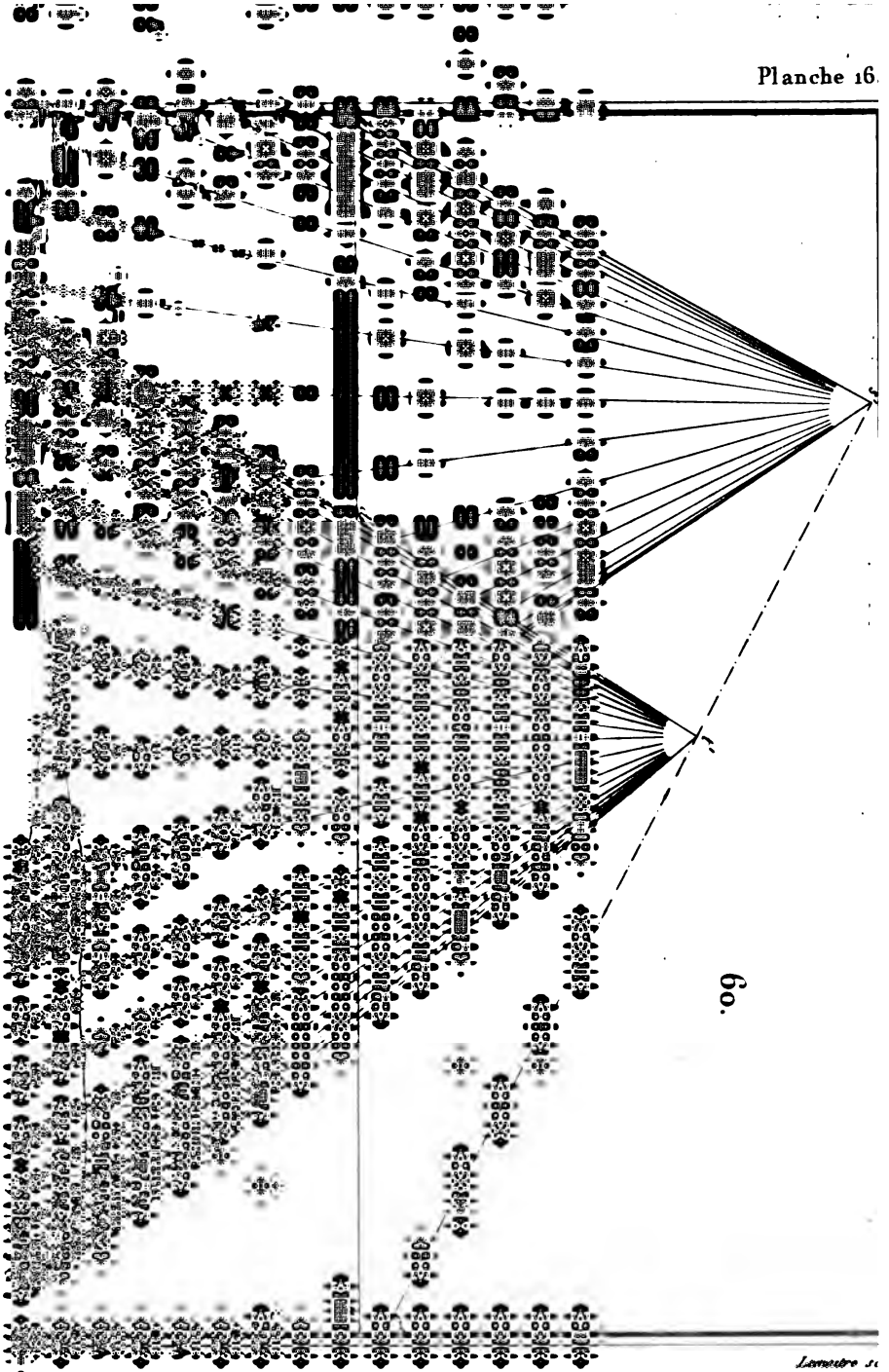


Lemaitre sc.

UNIV. OF MICH.



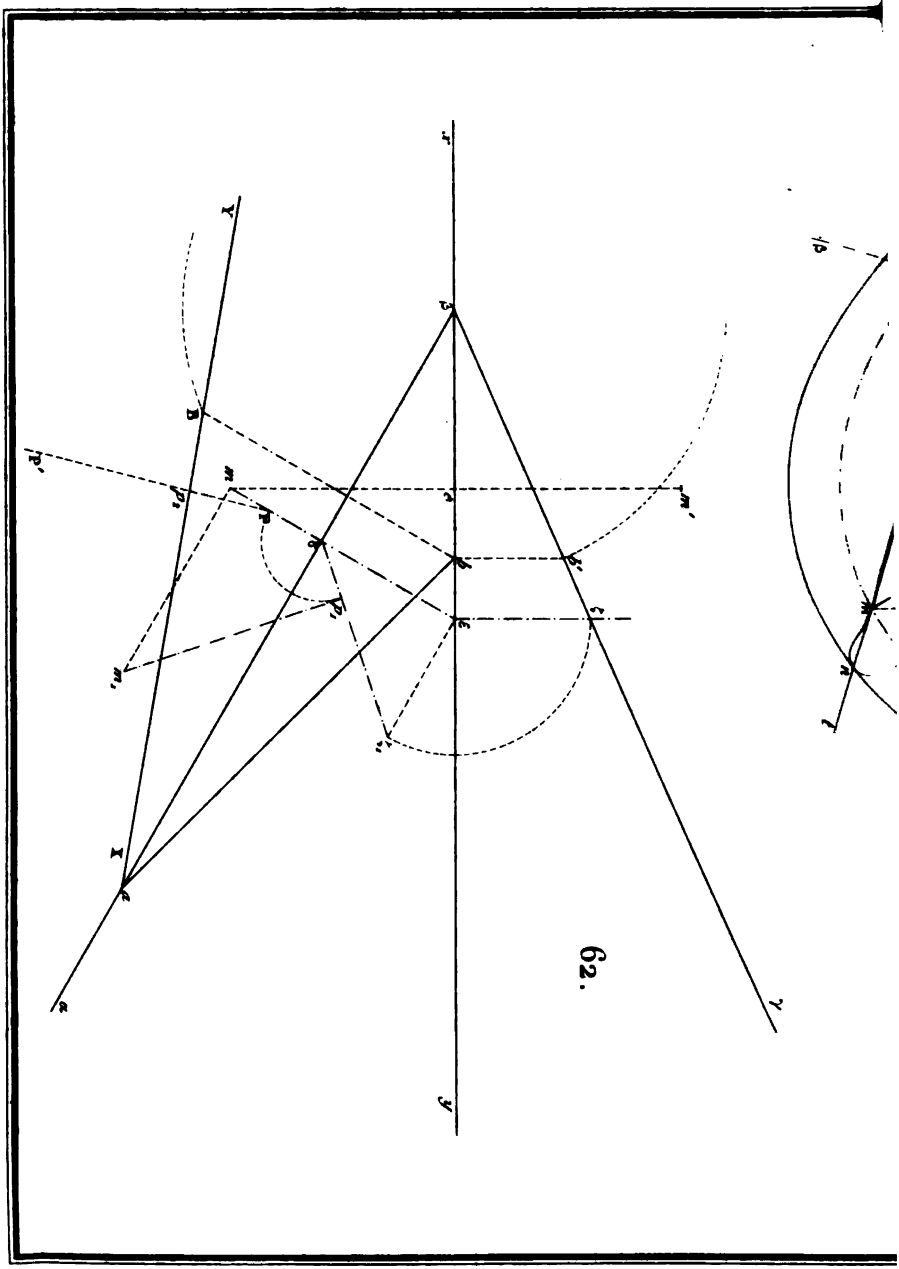
ulan del.



60.

Lemaître s

UN. OF MIC



62.

Calalan del.

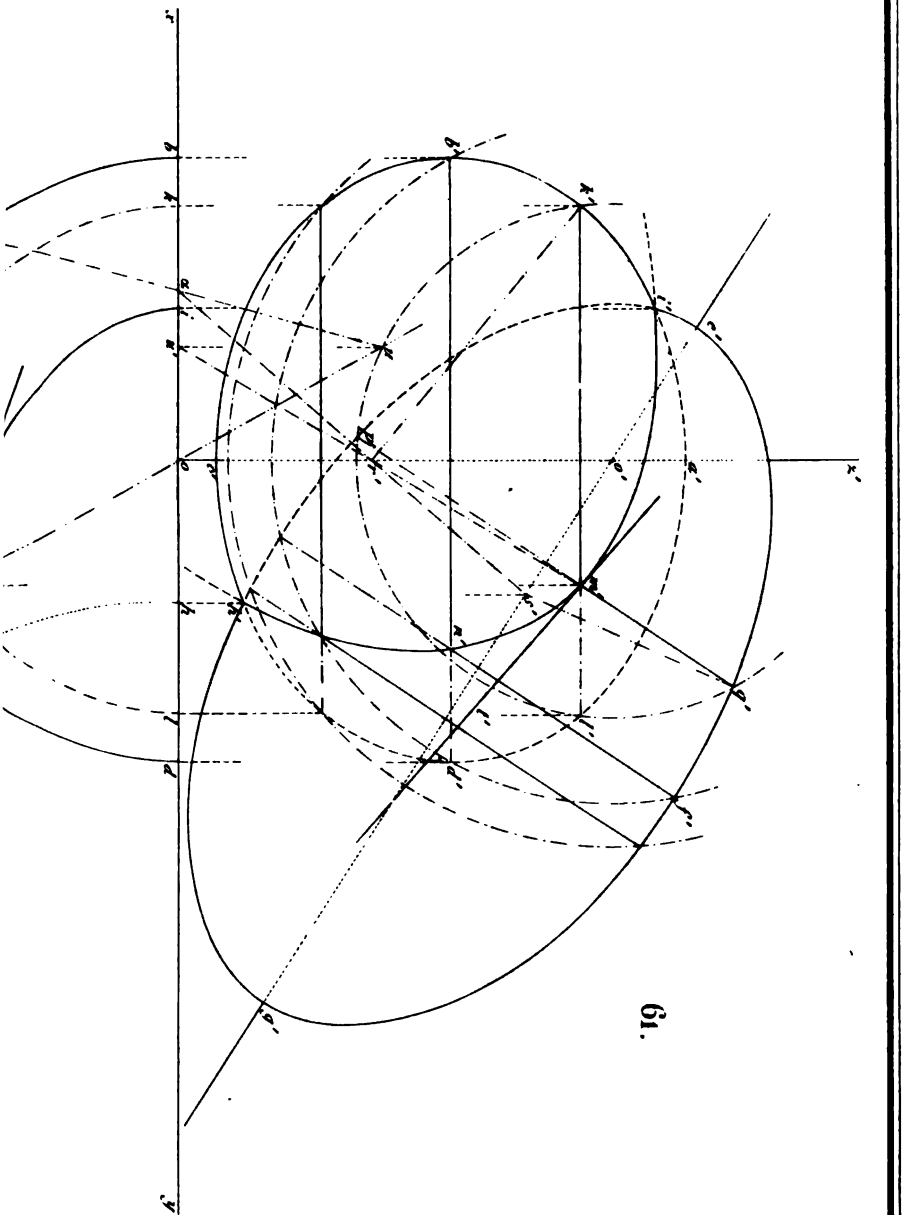


Fig. 1.

Lemaître sc

UNIV. OF M.